

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА СЕВАСТОПОЛЯ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»**

**Методические рекомендации
по подготовке обучающихся к ЕГЭ по информатике и ИКТ**

**Учитель информатики ГБОУ
«Гимназия № 1 им. А. С.
Пушкина»
Салтыкова Марина Викторовна**

Севастополь
2021

Салтыкова М.В. Методические рекомендации по подготовке обучающихся к ЕГЭ по информатике и ИКТ. – Севастополь, ГАОУ ПО ИРО, 2021. – 16 с.

Рекомендовано к изданию решением Редакционно-издательского совета ГАОУ ПО ИРО (протокол № 8 от 12.04.2021).

Методические рекомендации адресованы учителям информатики общеобразовательных учреждений, выпускникам, выбравшим экзамен по информатике и ИКТ.

Методические рекомендации подготовлены на основе открытых электронных источников и опыта работы учителей информатики ГБОУ «Гимназия № 1 имени А.С. Пушкина» города Севастополя.

Пояснительная записка

Настоящие методические рекомендации подготовлены на основе открытых источников и опыта работы учителей информатики ГБОУ «Гимназия № 1 им. А.С. Пушкина» г. Севастополя.

Основной формой государственной итоговой аттестации выпускников школ Российской Федерации является Единый государственный экзамен (ЕГЭ), представляющий собой форму объективной оценки качества подготовки лиц, освоивших образовательные программы среднего общего образования, с использованием контрольных измерительных материалов, представляющих собой комплексы заданий стандартизированной формы, выполнение которых позволяет установить уровень усвоения федерального государственного образовательного стандарта.

Начиная с 2021 года ЕГЭ по учебному предмету «Информатика и ИКТ» будет проводиться в компьютерной форме (далее – КЕГЭ). Проведение государственной итоговой аттестации по информатике и ИКТ в формате КЕГЭ требует от учителя выбора оптимальных форм и методов обучения, создания определенной системы подготовки обучающихся к сдаче единого государственного экзамена.

Целью написания методических рекомендаций является оказание методической помощи учителям информатики по подготовке обучающихся к сдаче КЕГЭ по предмету «Информатика и ИКТ».

Задачи методических рекомендаций: проанализировать результаты ЕГЭ-2020; познакомить с особенностями компьютерной формы проведения ЕГЭ, а также со структурой экзамена по информатике в 2021 году; выделить основные темы и типы заданий; дать рекомендации по подготовке к экзамену; предоставить учителю материалы, необходимые для планирования и проведения занятий; оказать помощь в разборе заданий ЕГЭ с высоким процентом ошибок, а также заданий группы высокого уровня сложности.

Актуальность данных рекомендаций заключается в том, что в связи с тем, что все большее количество выпускников выбирают для сдачи государственного экзамена информатику, перед учителем стоит ответственная задача: с одной стороны, необходимо организовать качественную подготовку к предстоящему экзамену, а с другой стороны, не утратить личностного, творческого, мировоззренческого смысла преподаваемого предмета.

Данные рекомендации будут полезны как учителям информатики общеобразовательных учреждений, так и выпускникам, выбравшим экзамен по информатике и ИКТ.

Статистические данные об участниках ЕГЭ по информатике

Материалы единого государственного экзамена по информатике и ИКТ, с одной стороны, позволяют установить уровень освоения выпускниками предмета согласно федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования (ФГОС СОО), а с другой – результаты ЕГЭ признаются образовательными учреждениями высшего профессионального образования как результаты вступительных испытаний по информатике и ИКТ.

Преподавание информатики в школах города Севастополя проводится на двух уровнях: базовом и профильном. «Информатика и ИКТ» – это экзамен по выбору. Предметная подготовка учащегося на базовом уровне, даже если она реализуется по некоторым темам в расширенном и углубленном варианте, не дает возможности в полной мере соответствовать требованиям ЕГЭ. Надо понимать, что требования ЕГЭ – это ориентация на профильное, а не на базовое обучение данному предмету. На сдачу ЕГЭ должны быть ориентированы те учащиеся, которые планируют дальнейшее обучение по техническим специальностям, связанным с информатикой (IT-отрасль: создание, развитие и эксплуатация информационных систем). На технические специальности в большинство вузов требуется сдача трех экзаменов: по русскому языку, математике, физике или информатике. Но есть вузы, для поступления в которые необходимо сдать 4 экзамена. Информатику, по данным Федерального института педагогических измерений (ФИПИ), сдают 10–12 % абитуриентов. В нашей гимназии на данный экзамен в 2021 году зарегистрировались 18 человек (56 % – обучающиеся классов физико-математического профиля).

Количество участников ЕГЭ по информатике в России снижается, а в Севастополе – увеличивается (рисунок 1). Это связано с тем, что многие выпускники планируют поступление в столичные вузы. Так, в 2020 году процент от общего количества участников увеличился до 10,6 % по сравнению с 2019 г. (6,78%).

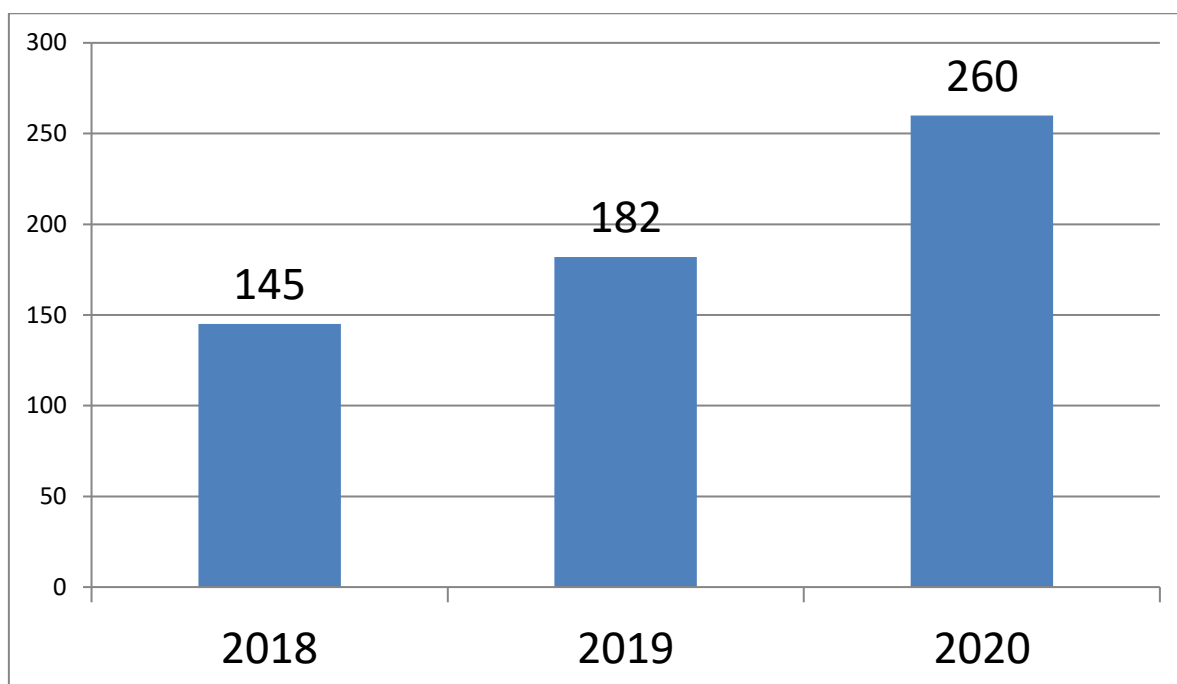


Рисунок 1 – Количество участников ЕГЭ по информатике в г. Севастополе

Средний тестовый балл по РФ в 2020 году составил 61,2, а по Севастополю – 55 (рисунок 2). По сравнению с 2019 г. средний балл по Севастополю понизился.

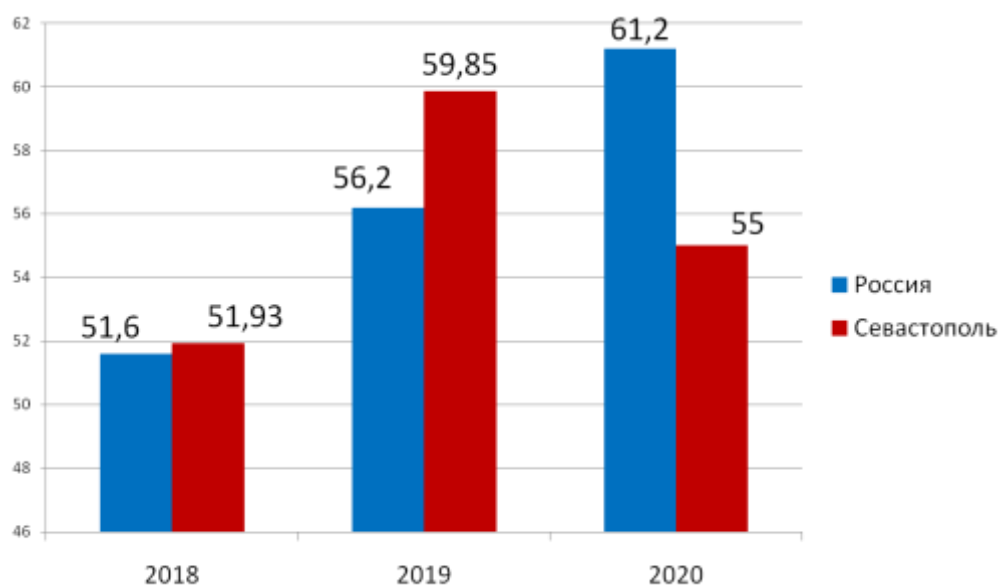


Рисунок 2 – Средний тестовый балл по информатике в 2020 году

Доля участников, получающих высокие тестовые баллы (81–100), также понизилась в 2020 году до 13,08 % по сравнению с 2019 г. (18,13%).

Доля выпускников, не набравших минимального количества баллов, в 2020 г. составила 16,92%, в то время как в 2019 г. она составляла 10,99% (рисунок 3).

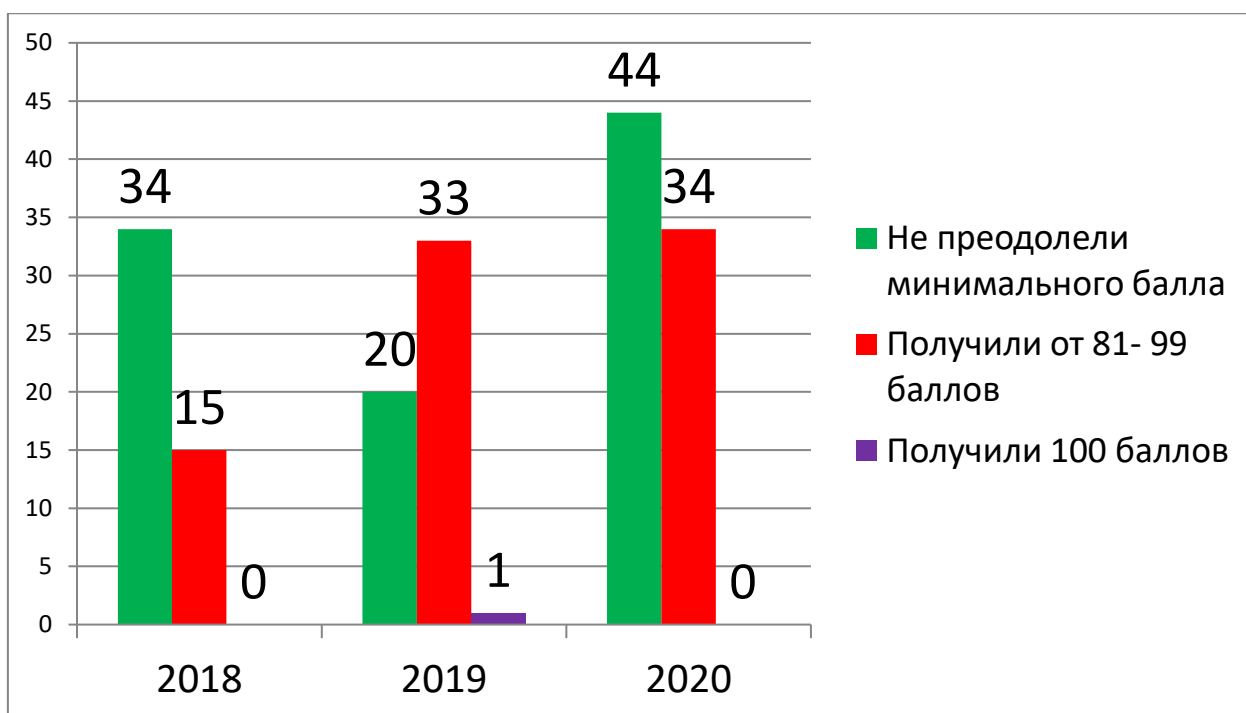


Рисунок 3 – Динамика результатов ЕГЭ по информатике в г. Севастополе

Из анализа результатов сдачи ЕГЭ по информатике следует, что количество участников растёт ежегодно. Такая тенденция наблюдается с 2014 года. Это обусловлено требованиями современного мира к цифровизации, что влечёт за собой большую востребованность ИТ специалистов во всех сферах деятельности.

Каждому учителю, занимающемуся подготовкой учащихся к единому государственному экзамену по информатике, необходимо понимать, что только системная работа в течение нескольких лет позволит повысить продуктивность и качество подготовки к ЕГЭ и даст шанс надеяться на положительные результаты сдачи экзаменов.

Начинать подготовку учащихся к ЕГЭ необходимо как можно раньше. В планы уроков, начиная с 8 класса и на протяжении последующих лет работы в данном классе, необходимо включать задания из ГИА. Очень важно выстроить систему контроля знаний, умений и навыков учащихся, используя для этого задания, аналогичные заданиям экзаменационных материалов.

Самым интенсивным периодом подготовки учащихся к ЕГЭ по информатике является последний год обучения.

Компьютерная форма проведения ЕГЭ по информатике

В 2021 году одиннадцатиклассники впервые будут сдавать экзамен по информатике в компьютерной форме.

Экзаменационная работа выполняется с помощью специализированного программного обеспечения, предназначенного для проведения экзамена в компьютерной форме. Оцениваются работы

автоматически. Предметная комиссия (ПК) не участвует в проверке экзаменационной работы (в 2021 году ПК по учебному предмету «Информатика и ИКТ» не создаётся).

Длительность экзамена (время экзаменационной работы) составляет 3 часа 55 минут (235 минут).

В работу входят 27 заданий: 9 с обязательной практикой на ПК, остальные 18 заданий требуют только ввод ответа и сохраняют преемственность с КИМ ЕГЭ прошлых лет. При этом они адаптированы к новым условиям сдачи экзамена. Все ответы – конкретные значения.

При выполнении заданий будут доступны текстовый редактор, редактор электронных таблиц, системы программирования. В КИМ включены задания на практическое программирование (составление и отладка программы в выбранной участником среде программирования), работа с электронными таблицами и информационный поиск (9 заданий – 33%). Выполнение заданий по программированию допускается на языках программирования: C++, Java, C#, Pascal, Python, школьный алгоритмический язык.

На экзамене запрещены средства мобильной связи и справочная литература. На протяжении сдачи экзамена доступ к сети Интернет запрещён.

Апелляции о несогласии с выставленными баллами конфликтной комиссией не рассматриваются. Рассматриваются апелляции только о нарушении порядка проведения КЕГЭ (технические ошибки).

Основные документы, размещённые на сайте Федерального института педагогических измерений <http://www.fipi.ru>:

1. **Кодификатор** элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения ЕГЭ по информатике и ИКТ.
2. **Спецификация** КИМ для проведения в 2021 году ЕГЭ по информатике и ИКТ.
3. **Демонстрационный вариант** КИМ ЕГЭ по информатике и ИКТ в 2021 году.

Экзаменационная работа охватывает основное содержание курса информатики, важнейшие его темы, наиболее значимый в них материал, однозначно трактуемый в большинстве преподаваемых в школе вариантов курса информатики. Работа содержит как задания базового уровня сложности, проверяющие знания и умения, предусмотренные стандартами базового уровня подготовки по предмету, так и задания повышенного и высокого уровней, предусмотренные профильным стандартом. Проверка практических навыков решения учебных задач с помощью компьютера

обеспечивается набором заданий, для выполнения которых необходимо воспользоваться редактором электронных (динамических) таблиц, текстовым редактором или средой программирования на одном из универсальных языков программирования высокого уровня.

Каждый вариант экзаменационной работы включает в себя 27 заданий, различающихся формой, уровнем сложности и необходимым для их выполнения программным обеспечением.

При выполнении любого из заданий требуется решить тематическую задачу: либо прямо использовать известное правило, алгоритм, умение, либо выбрать из общего количества изученных понятий и алгоритмов наиболее подходящее и применить его в известной или новой ситуации.

Распределение заданий по уровням сложности: 10 заданий базового уровня сложности (34% от максимального количества баллов), 13 заданий повышенного уровня (43%) и 4 задания высокого уровня (23%).

Правильное выполнение каждого задания № 1–24 оценивается в 1 балл (рисунок 4). Ответ представляет собой натуральное число (несколько чисел) или последовательность символов (2-е задание). Стоит обратить особое внимание на аккуратность ввода ответов. Необходимо внимательно читать в заданиях формат и *последовательность* ввода чисел.

За верный ответ на задания № 25–27 ставится 2 балла (рисунок 4).

Предусмотрены критерии выставления 1 балла за эти задания.

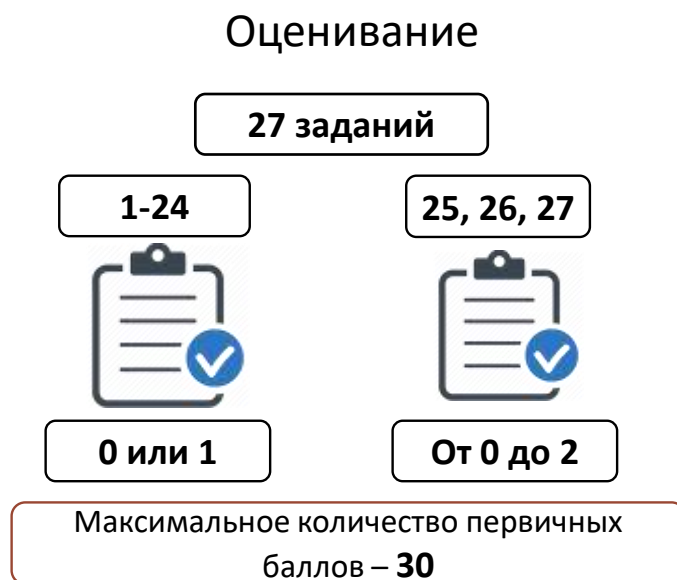


Рисунок 4 – Выставление баллов за выполнение заданий

Задание № 25. 1 балл выставляется за ошибочные значения только в одной строке ответа ИЛИ за отсутствие не более одной строки ответа, ИЛИ присутствие не более одной лишней строки ответа. В остальных случаях – 0 баллов.

Задание № 26. 1 балл выставляется, если значения в ответе перепутаны местами ИЛИ в ответе присутствует только одно верное значение (второе отсутствует или неверно). В остальных случаях – 0 баллов.

Задание № 27. 1 балл выставляется, если значения в ответе перепутаны местами ИЛИ в ответе присутствует только одно верное значение (второе отсутствует или неверно). В остальных случаях – 0 баллов.

Максимальное количество первичных баллов, которое можно получить за выполнение всех заданий экзаменационной работы, – 30 (рисунок 4), что составляет 100 тестовых баллов.

Минимальное количество баллов, подтверждающее освоение выпускниками основной общеобразовательной программы среднего общего образования в соответствии с требованиями ФКГОС – 7 первичных баллов или 44 тестовых.

Для того чтобы рассматривать решение задач ЕГЭ на уроках, необходимо чётко представлять тематическое распределение заданий, которые предлагаются на экзамене. Ниже перечислены темы и соответствующие номера заданий в демоверсии ЕГЭ 2021 г.

1. Информация и её кодирование

№ 4 – Кодирование и декодирование данных.

№ 7-1 – Кодирование графической информации.

№ 7-2 – Кодирование звуковой информации.

№ 7-1, 7-2 – Скорость передачи информации.

№ 8 – Кодирование, комбинаторика.

№ 11 – Информационный объём сообщения.

2. Системы счисления

№ 8 – Кодирование, комбинаторика.

№ 14 – Позиционные системы счисления.

3. Логика

№ 2 – Анализ таблиц истинности логической функции.

№ 15 – Проверка истинности логического выражения. Законы алгебры логики.

4. Моделирование

№ 1 – Анализ информационных моделей (графы, деревья, матрицы).

№ 13 – Поиск путей в графе.

№ 19-21 – Игровые стратегии.

5. Пользовательский курс

№ 3 – Сортировка и поиск в базах данных.

№ 9 – Обработка числовой информации в электронных таблицах.

№ 10 – Поиск средствами операционной системы и текстового редактора.

№ 18 – Обработка выражений в электронных таблицах.

6. Алгоритмизация и программирование

№ 5 – Формальное исполнение алгоритма.

№ 12 – Анализ результат исполнения алгоритма.

№ 23 – Анализ алгоритма для исполнителя, динамическое программирование.

№ 6 – Анализ программ с циклами.

№ 16 – Рекурсивные алгоритмы.

№ 17 – Программирование. Перебор, целочисленные данные.

№ 22 – Анализ программы с циклами и условными операторами

№ 24 – Программирование. Символьные строки.

№ 25 – Программирование. Обработка целочисленной информации. Делимость.

№ 26 – Программирование. Массивы.

№ 27 – Программирование. Анализ числовых последовательностей.

Некоторые задания относятся к укрупнённым позициям. Это значит, что данный номер задания может содержать несколько тем.

Укрупнённые позиции:

№ 7 – Скорость передачи, кодирование звуковых и графических данных.

№ 27 – Умение самостоятельно программировать в двух вариантах.

При решении многих заданий по теме алгоритмизация и программирование, обучающиеся должны уметь «видеть» или использовать базовые алгоритмические задачи, которые могут быть рассмотрены на уроках в рамках данной темы.

Возможные алгоритмические задачи:

1. Нахождение минимума и максимума двух, трех, четырех данных чисел без использования массивов и циклов.

2. Нахождение всех корней заданного квадратного уравнения.

3. Запись натурального числа в позиционной системе с основанием, меньшим или равным 10. Обработка и преобразование такой записи числа.

4. Нахождение сумм, произведений элементов данной конечной числовой последовательности (или массива).

5. Использование цикла для решения простых переборных задач (поиск наименьшего простого делителя данного натурального числа, проверка числа на простоту и т.д.).

6. Заполнение элементов одномерного и двумерного массивов по заданным правилам.

7. Операции с элементами массива. Линейный поиск элемента. Вставка и удаление элементов в массиве. Перестановка элементов данного массива в обратном порядке. Суммирование элементов массива.

8. Проверка соответствия элементов массива некоторому условию.

9. Нахождение второго по величине (второго максимального или второго минимального) значения в данном массиве за однократный просмотр массива.

10. Нахождение минимального (максимального) значения в данном массиве и количества элементов, равных ему, за однократный просмотр массива.

11. Операции с элементами массива, отобранные по некоторому условию (например, нахождение минимального четного элемента в массиве, нахождение количества и суммы всех четных элементов в массиве).

12. Сортировка массива.

13. Слияние двух упорядоченных массивов в один без использования сортировки.

14. Обработка отдельных символов данной строки. Подсчет частоты появления символа в строке.

15. Работа с подстроками данной строки с разбиением на слова по пробельным символам. Поиск подстроки внутри данной строки, замена найденной подстроки на другую строку.

16. Работа с файлами. Чтение данных из файла.

Задания по уровню сложности

Как уже говорилось, в заданиях ЕГЭ по информатике можно выделить задания трёх уровней сложности: базовый, повышенный и высокий. Базовый уровень – конкретные знания и умения по теме в стандартной ситуации. Повышенный и высокий уровни соответствуют профильному курсу преподавания информатики в школе. Задания этого уровня предполагают применение знаний из различных областей в новой ситуации.

Из 10 заданий базового уровня сложности 5 заданий в 2020 году вызвали определенные затруднения. Два задания – № 8 (11% выполнения) и № 7 (43% выполнения) связаны с тематикой равномерного кодирования текстов (задание № 8) и звука или растровых изображений (задание № 7). И в предыдущие годы задания по этой теме вызвали затруднения: задание 4 по теме «Неравномерное кодирование текста», задание 16 «Рекурсивные алгоритмы».

Нет смысла работать на повышенном уровне, если базовое содержание не усвоено. Также следует еще раз отметить, что значительная часть экзаменуемых при подготовке ориентируется на тренировку решения

конкретного типа заданий, приведенного в демоверсии КИМ ЕГЭ, а не на полноценное усвоение изучаемого материала.

Из 12 заданий повышенного уровня вызывают наибольшие затруднения № 11 – кодирование текста, № 12 – исполнители (новая ситуация и любой исполнитель), № 14 – системы счисления, № 15 – преобразование логических выражений, № 16 – рекурсия, № 22 – циклы с ветвлением.

В заданиях повышенного уровня сложности появились новые задания: № 17 – создание собственной программы в среде программирования и № 18 – обработка данных в электронных таблицах. Эти задания необходимо выполнять на компьютере. Если ученик владеет навыками работы в электронных таблицах и системах программирования, то многие задания, которые ранее выполнялись вручную, теперь можно проверить на компьютере.

Игровые стратегии (№ 19–21), которые в 2020 году были одним заданием, разбиты на три. И вопрос в задачах ставится таким образом, чтобы можно было в качестве ответа ввести только число или два числа.

Оставшиеся четыре задания имеют высокий уровень сложности. Все задания связаны с программированием. Самое сложное – задание № 27.

Так как основной УМК, который используется в школах города Севастополя, это УМК под ред. И.Г. Семакина, то предлагаем распределение тем ЕГЭ по учебнику этого авторского коллектива.

Информатика 10 класс

Глава 1. Информация

№ 8, 14 (системы счисления)

Глава 2. Информационные процессы

№ 7, 11 (текст, звук, графика)

№ 4 (кодирование-декодирование)

№ 5, 12 (исполнители)

Глава 3. Программирование

№ 6 (циклы), № 16 (рекурсия), № 26 (массивы), № 22 (циклы с условиями)

№ 2, № 15 (логика)

Информатика 11 класс

Глава 1. Информационные системы и базы данных

№ 1, № 13, № 23 (графы и деревья),

№ 3 (базы данных)

Глава 3. Информационное моделирование

№ 9, № 18, можно № 23, №16 (рекуррентные формулы), № 26 (массивы) в электронных таблицах

Тематическое распределение

1. Информация

№ 4 – Кодирование и декодирование данных (10 кл. Гл.1)

№ 7 – Кодирование графической информации (10 кл. Гл.1)

№ 7 – Кодирование звуковой информации (10 кл. Гл.1)

№ 7 – Скорость передачи информации (10 кл. Гл.1)

№ 11 – Вычисление количества информации (10 кл. Гл.1)

2. Системы счисления

№ 8 – Кодирование, комбинаторика (10 кл. Гл.1)

№ 14 – Позиционные системы счисления (10 кл. Гл.1)

3. Логика

№ 2 – Составление таблицы истинности (10 кл. Гл.3, § 18)

№ 15 – Логические выражения (10 кл. Гл.3, § 18)

4. Пользовательский курс

№ 1 – Анализ информационных моделей (11 кл. Гл.1, § 2)

№ 3 – Сортировка и поиск в базах данных (11 кл. Гл.1)

№№ 9, 18, 23, 26 – электронные таблицы (11 кл. Гл.3)

№ 13 – Поиск путей в графе (11 кл. Гл.1, § 2)

№№ 19-21 – Теория игр (11 кл. Гл.1, § 2)

5. Алгоритмизация и основы программирования

№ 5 – Анализ алгоритмов для исполнителей (10 кл. Гл.2, практикум)

№ 6 – Анализ программ с циклами (10 кл. Гл.3)

№ 16 – Рекурсивные алгоритмы (10 кл. Гл.3)

№ 12 – Выполнение алгоритма для исполнителя (10 кл. Гл.2, практикум)

№ 26 – Обработка массивов и матриц (10 кл. Гл.3)

№ 22 – Анализ программы с циклами и условными операторами (10 кл. Гл.3)

№ 23 – Перебор вариантов, динамическое программирование (11 кл. Гл.1, § 2)

6. Высокий уровень сложности

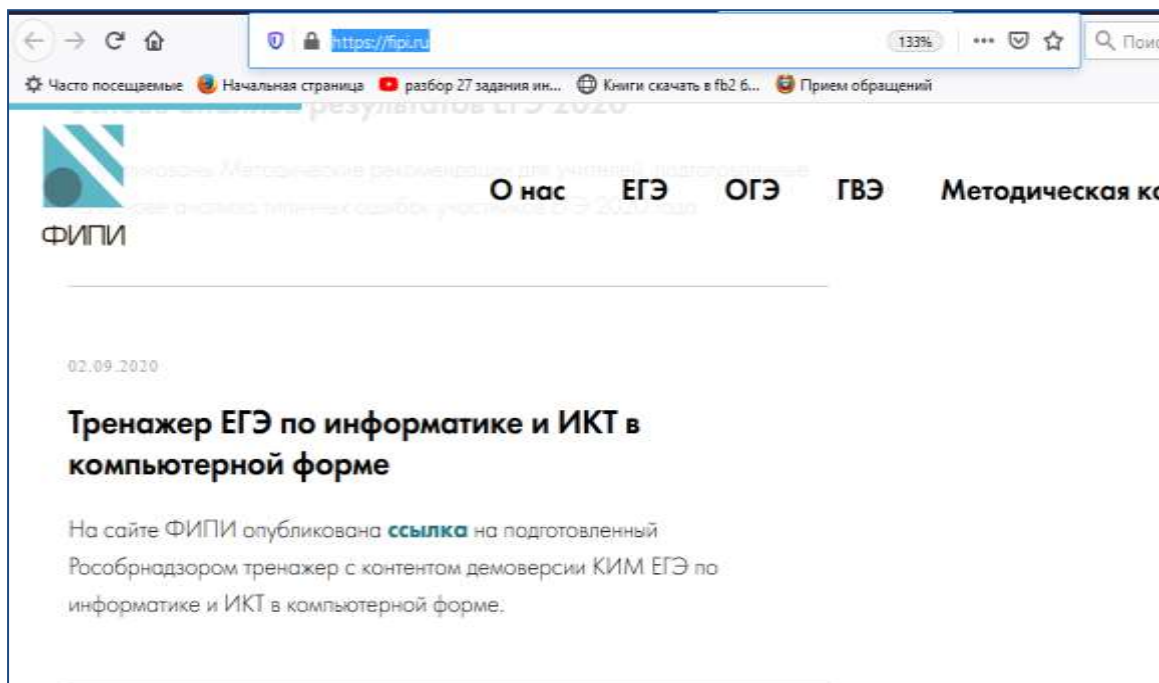
№ 24 – Обработка строк (10 кл. Гл.3)

№ 26 – Алгоритмы обработки массивов (10 кл. Гл.3)

№ 27 – Обработка массивов и последовательностей (10 кл. Гл.3)

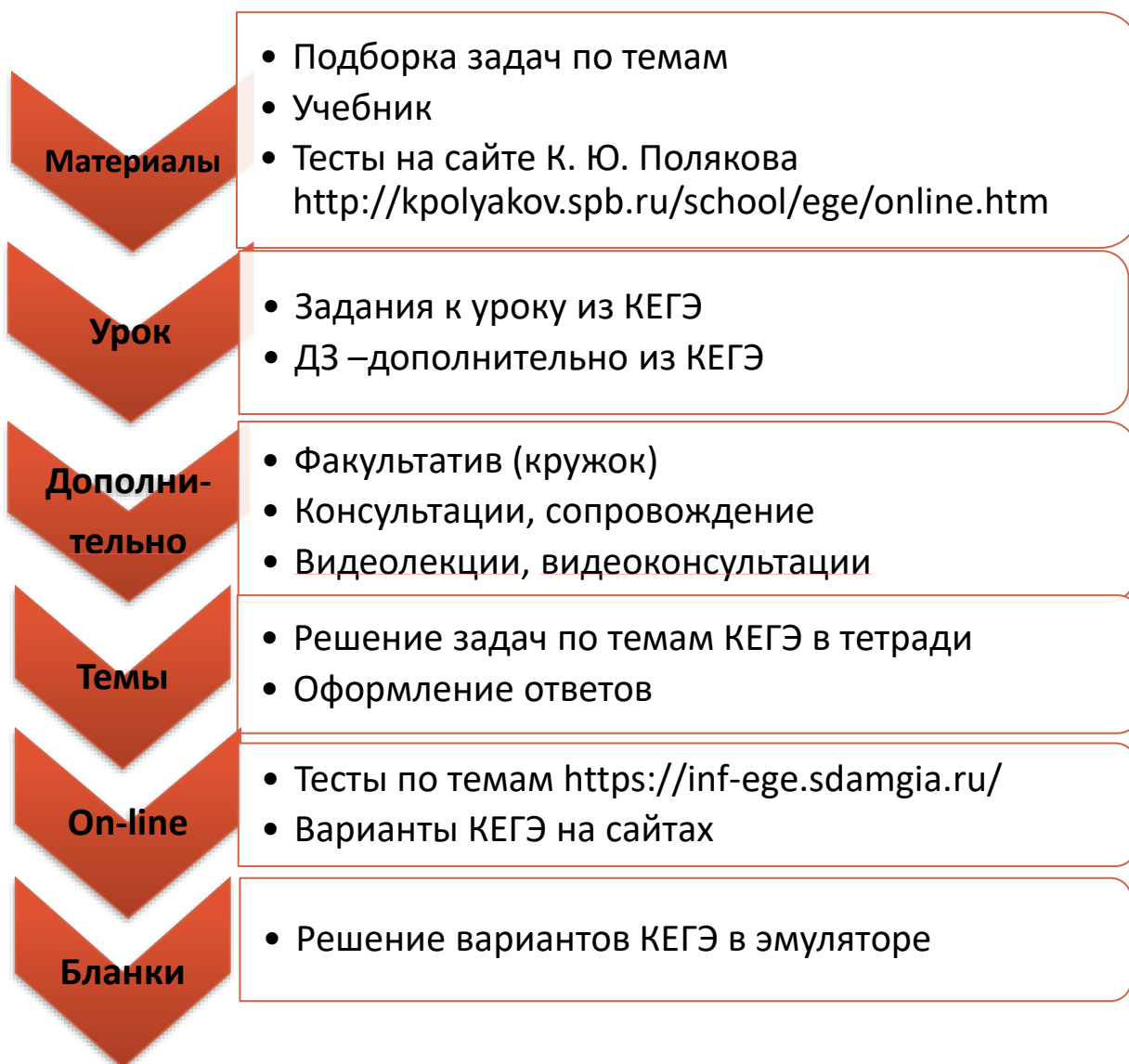
Тренировки

Симулятор программного обеспечения для проведения компьютерного ЕГЭ по информатике опубликован на сайтах Федерального центра тестирования (ФЦТ) и Федерального института педагогических измерений (ФИПИ), а также на сайте автора УМК К. Ю. Полякова.



Система подготовки к ЕГЭ

1. Изучение школьной программы на уроках.
2. Знакомство с документами на сайте ФИПИ (кодификатор, спецификация, демоверсия).
3. Подборка задач по темам (в УМК К.Ю. Полякова входят методические материалы на его сайте <https://kpolyakov.spb.ru>).
4. Дополнительно к домашней работе решать задания в формате КЕГЭ.
5. Дополнительные занятия.
6. Решение задач по темам КЕГЭ в тетради и на компьютере.
7. Решение вариантов заданий на сайтах по подготовке к КЕГЭ.
8. Решение вариантов заданий КЕГЭ в эмуляторе.



С целью совершенствования компетенций учителей в области подготовки обучающихся к сдаче ГИА с 2015 года для учителей информатики образовательных организаций города Севастополя проводится городской постоянно действующий семинар «Подготовка к ЕГЭ». Материалы семинара размещены в приложении к методическим рекомендациям.

Список источников

1. Демоверсии, спецификации, кодификаторы: [Электронный ресурс]// Федеральный институт педагогических измерений. URL: <https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/173801626-5>. (Дата обращения: 26.03.2021).
2. ЕГЭ по информатике (2021): [Электронный ресурс]// Сайт Скропьяков.spb.ru. URL: <https://www.kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm/> (Дата обращения: 26.03.2021).
3. Тренировочные варианты: [Электронный ресурс]// Образовательный портал «Сдам ГИА: решу ЕГЭ». URL: <http://inf.reshuege.ru/?redir=1>. (Дата обращения: 26.03.2021).
4. Вебинары по информатике: [Электронный ресурс]// Издательство «Легион». URL: <https://www.legionr.ru/webinars/informatika/> (Дата обращения: 26.03.2021).
5. ЕГЭ-2017. Видеоконсультации. Информатика и ИКТ. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=2YF96VitJDU>. (Дата обращения: 26.03.2021).

Слайд 1

Кодирование. Комбинаторика

Слайд 2

ЕГЭ № 8. Кодирование. Комбинаторика

Сообщение — это любая последовательность символов некоторого алфавита.

Кодовый – алфавит, с помощью которого формируют сообщения (кодовые слова), определённой длины.

Мощность кодового алфавита – ограниченное количество символов.

Пример:

алфавит @ # \$ %

мощность $M=4$

сообщения @@ @# @\$ @%

Кодирование. Комбинаторика

Количество возможных сообщений (слов),
которые можно сформировать с помощью
кодowego алфавита

$$Q = M^L$$

Пример:

Кодовый алфавит Е, Г, Э (M=3)

Длина кодowego слова L=5

* * * * *

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$$

Сколько слов длины 5, начинающихся с
гласной буквы, можно составить из букв Е,
Г, Э? Каждая буква может входить в слово
несколько раз.

Кодовый алфавит Е, Г, Э (M=3)

* * * * *

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$$

Слайд 5

Сколько слов длины 5, начинающихся с согласной буквы, можно составить из букв Е, Г, Э? Каждая буква может входить в слово несколько раз.

Кодовый алфавит Е, Г, Э (M=3)

* * * * *

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Слайд 6

21. Сколько слов длины 5, начинающихся с согласной буквы, можно составить из букв Л, Е, Т, О? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Слова не обязательно должны быть осмысленными словами русского языка.

Кодовый алфавит ЛЕТО (M=4)

* * * * *

$$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 512$$

22. Сколько существует различных символьных последовательностей длины 4 в трёхбуквенном алфавите {К, О, Т}, которые содержат ровно ОДНУ букву О?

```

О * * *
* О * *
* * О *
* * * О
    
```

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$5 \cdot 8 = 40$$

22. Сколько существует различных символьных последовательностей длины 5 в трёхбуквенном алфавите {К, О, Т}, которые содержат ровно две буквы О?

```

О О * * *
О * О * *
О * * О *
О * * * О
* О О * *
* О * О *
* О * * О
* * О О *
* * О * О
* * * О О
    
```

$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ (C)}$$

$$10 \cdot 8 = 80$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Р07. Вася составляет 3-буквенные слова, в которых есть только буквы В, Е, С, Н, А, причём буква А используется в каждом слове хотя бы 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

* * *

Всего слов $5^3 = 125$

Без А $4^3 = 64$

Осталось $125 - 64 = 61$

Р-11 (демо-2021). Игорь составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово.

В качестве кодовых слов Игорь использует трёхбуквенные слова, в которых могут быть только буквы Ш, К, О, Л, А, причём буква К появляется ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько различных кодовых слов может использовать Игорь?

К * *

* К *

* * К

$$1 \cdot 4 \cdot 4 = 16$$

$$3 \cdot 16 = 48$$

ЕГЭ № 14. Позиционные системы счисления

$$P^N = \underbrace{10 \dots 0}_N p \qquad P^N - 1 = \underbrace{Cm \dots Cm}_N$$

$$10^N = \underbrace{10 \dots 0}_N \qquad 10^N - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_N$$

$$2^N = \underbrace{10 \dots 0}_N {}_2 \qquad 2^N - 1 = \underbrace{1 \dots 1}_N$$

ЕГЭ № 14. Позиционные системы счисления

$$P^N - P^M = \underbrace{Cm \dots Cm}_{N-M} \underbrace{0 \dots 0}_M$$

$$10^N - 10^M = \underbrace{9 \dots 90}_{N-M} \underbrace{\dots 0}_M$$

$$2^N - 2^M = \underbrace{1 \dots 10}_{N-M} \underbrace{\dots 0}_M$$

$$3^N - 3^M = \underbrace{2 \dots 20}_{N-M} \underbrace{\dots 0}_3$$

ЕГЭ № 14. Позиционные системы счисления

$$P^N = \underbrace{10\dots 0}_N p$$

$$P^N - 1 = \underbrace{Cm\dots Cm}_N$$

$$P^N - P^M = \underbrace{Cm\dots Cm}_{N-M} \underbrace{0\dots 0}_M$$

P-20. Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} + 2^7$$

1. Привести все числа к **одному** основанию:

$$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} + 2^7 = (2^2)^{2015} + (2^3)^{405} - 2^{150} + 2^7$$

2. Расположить слагаемые в порядке **убывания** степеней:

$$2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} + 2^7$$

3. Применить **свойства**

$$1 + (1215 - 150)1065 + 1 = 1067$$

$$P^N = \underbrace{10\dots 0}_N p$$

$$P^N - P^M = \underbrace{Cm\dots Cm}_{N-M} \underbrace{0\dots 0}_M$$

P-20. Сколько единиц в двоичной записи числа
 $4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122$

1. Приведём все числа к **одному** основанию, учитывая, что $122 = 2^7 - 2^2 - 2^1$:

$$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122 = \\ = (2^2)^{2015} + (2^3)^{405} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$$

2. Расположить слагаемые в порядке **убывания** степеней:

$$2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$$

3. Применить свойства:

$$1 + (1215 - 7) \mathbf{1208 - 1 + 1 + 1 = 1210}$$

P-20. Сколько **нулей** в двоичной записи числа
 $4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122$

1. Приведём все числа к **одному** основанию, учитывая, что $122 = 2^7 - 2^2 - 2^1$:

$$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122 = \\ = (2^2)^{2015} + (2^3)^{405} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$$

2. Расположить слагаемые в порядке **убывания** степеней:

$$2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$$

3. Применить свойство для подсчёта единиц:

$$\mathbf{1 + (1215 - 7) 1208 - 1 + 1 + 1 = 1210}$$

4. Из общего количества цифр вычесть количество единиц: $4030 - 1210 = 2820$

P-21. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа $4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250$

1. Приведём все числа к **одному** основанию, учитывая, что $250 = 2^8 - 2^2 - 2^1$:

$$4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250 = (2^2)^{512} + (2^3)^{512} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$$

2. Расположить слагаемые в порядке **убывания** степеней:

$$2^{1536} + 2^{1024} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$$

3. Применить свойство для подсчёта единиц:

$$1 + (1024 - 8) - 1 - 1 - 1 = 1018$$

4. Из общего количества цифр вычесть количество единиц: $1537 - 1018 = 519$

P-24. (М.В. Кузнецова) Значение арифметического выражения: $64^{10} + 2^{90} - 16$ записали в системе счисления с основанием 8. Сколько цифр «7» содержится в этой записи?

1. Приведём все числа к **одному** основанию, учитывая, что $16 = 8^2 - 6 \cdot 8^1$:

$$64^{10} + 2^{90} - 16 = 8^{20} + 8^{30} - 8^2 + 6 \cdot 8^1$$

2. Расположить слагаемые в порядке **убывания** степеней:

$$8^{30} + 8^{20} - 8^2 + 6 \cdot 8^1$$

3. Применить свойство для подсчёта старших цифр:

$$20 - 2 = 18$$

P-25. (демо-2021) Значение арифметического выражения: $49^7 + 7^{21} - 7$ – записали в системе счисления с основанием 7. Сколько цифр 6 содержится в этой записи?

1. Приведём все числа к **одному** основанию:

$$49^7 + 7^{21} - 7 = 7^{14} + 7^{21} - 7^1$$

2. Расположить слагаемые в порядке **убывания** степеней:

$$7^{21} + 7^{14} - 7^1$$

3. Применить свойство для подсчёта старших цифр:

$$14 - 1 = 13$$

Задачи

1. Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{502} - 4^{211} + 2^{1536} - 19$?
2. Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{415} - 4^{162} + 2^{543} - 25$?
3. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа $4^{590} + 8^{350} - 2^{1020} - 25$?
4. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа $4^{230} + 8^{120} - 2^{150} - 100$?
5. **(М.В. Кузнецова)** Значение арифметического выражения: $27^4 - 9^5 + 3^8 - 25$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?
6. **(М.В. Кузнецова)** Значение арифметического выражения: $3 \cdot 16^8 - 4^5 + 3$ записали в системе счисления с основанием 4. Сколько цифр «3» содержится в этой записи?
7. **(М.В. Кузнецова)** Значение арифметического выражения: $5 \cdot 36^7 + 6^{10} - 36$ записали в системе счисления с основанием 6. Сколько цифр «5» содержится в этой записи?
8. **(М.В. Кузнецова)** Значение арифметического выражения: $4 \cdot 125^4 - 25^4 + 9$ записали в системе счисления с основанием 5. Сколько цифр «4» содержится в этой записи?

Графические методы решения заданий ЕГЭ

Задания ЕГЭ

1. Графы. Оптимальный маршрут (1).
2. Запросы в БД (3).
3. Кодирование, декодирование (4).
4. Алгоритмы минимальной длины (5).
5. Рекурсия (16).
6. Количество возможных путей (13).
7. Динамическое программирование (23).
8. Игровые стратегии (19-21).

КЕГЭ № 1. Графы. Оптимальный маршрут

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F, проходящего через пункт E и не проходящего через пункт B. Передвигаться можно только по указанным дорогам.

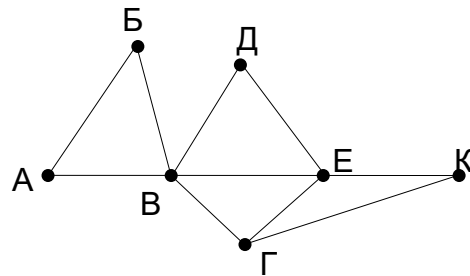
	A	B	C	D	E	F
A		2	4	8		16
B	2			3		
C	4			3		
D	8	3	3		5	3
E				5		5
F	16			3	5	

М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

Слайд 5

На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова длина дороги из пункта В в пункт Е. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		45		10			
П2	45			40		55	
П3					15	60	
П4	10	40				20	35
П5			15			55	
П6		55	60	20	55		45
П7				35		45	



М. В. Салтыкова, ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

Слайд 6

КЕГЭ № 3. Базы данных

В фрагменте базы данных представлены сведения о родственных отношениях. На основании приведённых данных определите, сколько прямых потомков (т.е. детей и внуков) Павленко А.К. упомянуты в таблице 1.

М. В. Салтыкова, ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

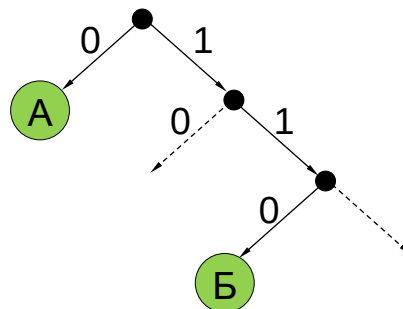
ID	Фамилия_И.О.	Пол	ID_Родителя	ID_Ребенка
2146	Кривич Л.П.	Ж	2146	2302
2155	Павленко А.К.	М	2146	3002
2431	Хитрук П.А.	М	2155	2302
2480	Кривич А.А.	М	2155	3002
2302	Павленко Е.А.	Ж	2302	2431
2500	Сокол Н.А.	Ж	2302	2511
3002	Павленко И.А.	М	2302	3193
2523	Павленко Т.Х.	Ж	3002	2586
2529	Хитрук А.П	М	3002	2570
2570	Павленко П.И.	М	2523	2586
2586	Павленко Т.И.	Ж	2523	2570
2933	Симонян А.А.	Ж	2529	2431
2511	Сокол В.А.	Ж	2529	2511
3193	Биба С.А.	Ж		

М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"



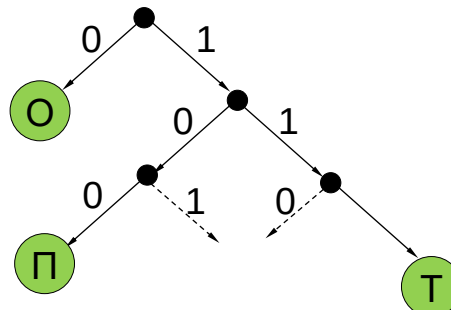
ЕГЭ № 4. Равномерные и неравномерные коды

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы А использовали кодовое слово 0, для буквы Б – кодовое слово 110. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырёх кодовых слов?



М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

По каналу связи передаются сообщения, содержащие только 4 буквы П, О, С, Т; для передачи используется двоичный код, допускающий однозначное декодирование. Для букв Т, О, П используются такие кодовые слова: Т: 111, О: 0, П: 100. Укажите кратчайшее кодовое слово для буквы С, при котором код будет допускать однозначное декодирование. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.



М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

ЕГЭ № 5. Алгоритмы минимальной длины

У исполнителя Удвоитель две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1

2. умножь на 2

Выполняя первую из них, Удвоитель прибавляет к числу на экране 1, а выполняя вторую, умножает его на 2. Запишите порядок команд в программе получения из числа 3 числа 63, содержащей не более 8 команд, указывая лишь номера команд.

М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

ЕГЭ № 16. Рекурсия

Дан рекурсивный алгоритм.
Найдите сумму чисел,
которые будут выведены при
вызове F(1).

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 5 then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3)  
  end  
end;
```

М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

Слайд 13

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 6 then begin  
    F(n+2);  
    F(n*3)  
  end  
end;
```

Найдите сумму чисел,
которые будут выведены при
вызове F(1)

М. В. Салтыкова, ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

Слайд 14

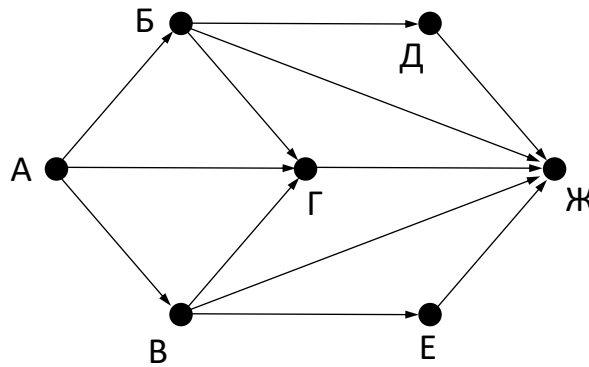
Ниже записаны две рекурсивные процедуры, F и G:

```
procedure F(n: integer); forward;  
procedure G(n: integer); forward;  
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n > 0 then G(n - 1);  
end;  
procedure G(n: integer);  
begin  
  writeln('*');  
  if n > 1 then F(n - 3);  
end;
```

Сколько символов «звёздочка» будет напечатано на
экране при выполнении вызова F(13)?

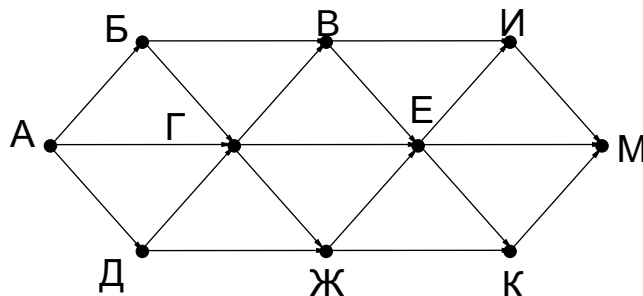
М. В. Салтыкова, ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

ЕГЭ № 13. Пути в графах



М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город М и **проходящих через город В**?



М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

ЕГЭ № 23. Динамическое программирование

Исполнитель Май преобразует число, записанное на экране. У исполнителя три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1

2. прибавь 2

3. прибавь 4

Сколько есть программ, которые число 21 преобразуют в число 30?

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

К_н

Исполнитель Июнь15 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1

2. Умножить на 2

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 29 и при этом траектория вычислений **содержит число 14** и **не содержит числа 25**?

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
											0				

М. В. Салтыкова. ГБОУ "Гимназия № 1 им. А. С. Пушкина"

Анализ программы, содержащей циклы и ветвления

- Задание № 22
- Алгоритм Евклида
- Значение цифры числа и системы счисления

Задание № 22

Содержательный раздел	Элементы теории алгоритмов. Программирование
Проверяемые элементы содержания	1.6.1. Формализация понятия алгоритма
Требования к уровню подготовки	1.1.4. Читать и отлаживать программы на языке программирования
Уровень сложности Время	Повышенный 5 мин.

Что нужно знать:

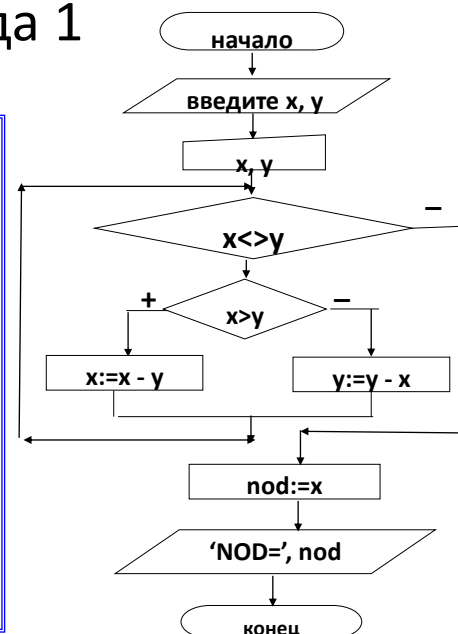
- операции целочисленного деления (div) и остатка от деления (mod);
- как работают операторы присваивания и цикла с предусловием, условный оператор;
- алгоритмы работы со значащими цифрами числа;
- алгоритмы перевода чисел в позиционных системах счисления;
- алгоритм Евклида;
- формальное исполнение алгоритмов, записанных языках программирования.

Алгоритм Евклида 1

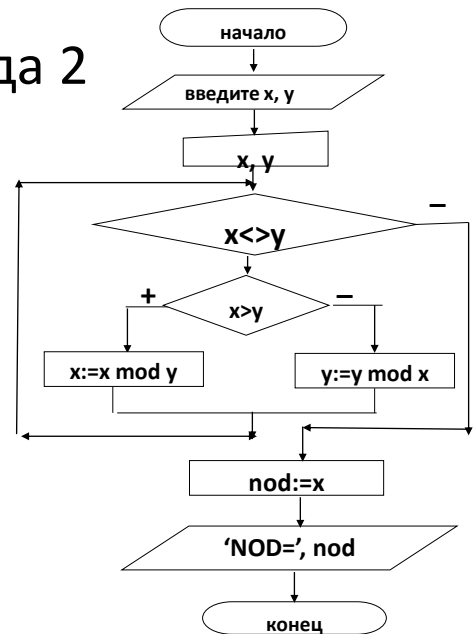
- **Алгоритм Евклида** – алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (**НОД**) двух целых неотрицательных чисел.
 - Для вычисления НОД двух натуральных чисел нужно заменять большее число на разность большего и меньшего до тех пор, пока одно из них не станет равно нулю; тогда второе – НОД.
1. Пусть x и y одновременно не равные нулю целые неотрицательные числа ($x < y$). Тогда **большее число (x или y)** можно заменить на разность $x := x - y$ или $y := y - x$.
 2. Повторять вычитание при условии, что числа не равны

Алгоритм Евклида 1

```
Program Evklid_1;  
  var x,y,nod:word;  
Begin  
  Writeln('Введите x>0, y>0');  
  Readln(x,y);  
  While x<>y do  
    begin  
      if x>y then x:=x - y  
        else y:=y - x;  
    end;  
  nod:=x;  
  Writeln('nod = ',nod)  
End.
```



Алгоритм Евклида 2



Алгоритм Евклида 3

```

Program Evklid_3;
  var x, y, z: integer; r, a, b: integer;
begin
  readln(x, y);
  if y > x
  then begin
    z := x; x := y; y := z;
  end;
  a := x; b := y;
  while b > 0 do
  begin
    r := a mod b;
    a := b;
    b := r;
  end;
  writeln('НОД(' x, y, ')=' a);
end.
  
```

Слайд 9

78. Получив на вход число x , этот алгоритм печатает число M . Известно, что $x > 100$. Укажите наименьшее такое (т. е. большее 100) число x , при вводе которого алгоритм печатает 11.

```
var x, L, M: integer;  
begin  
  readln(x);  
  L := x-21;  
  M := x+12;  
  while L <> M do  
    if L > M  
      then L := L - M  
      else M := M - L;  
  writeln(M);  
End.
```

Слайд 10

Демо. Получив на вход число x , этот алгоритм печатает число M . Известно, что $x > 100$. Укажите наименьшее такое (т. е. большее 100) число x , при вводе которого алгоритм печатает 26.

```
var x, L, M: integer;  
begin  
  readln(x);  
  L := x;  
  M := 65;  
  if L mod 2 = 0  
    then M := 52  
  while L <> M do  
    if L > M  
      then L := L - M  
      else M := M - L;  
  writeln(M);  
End.
```

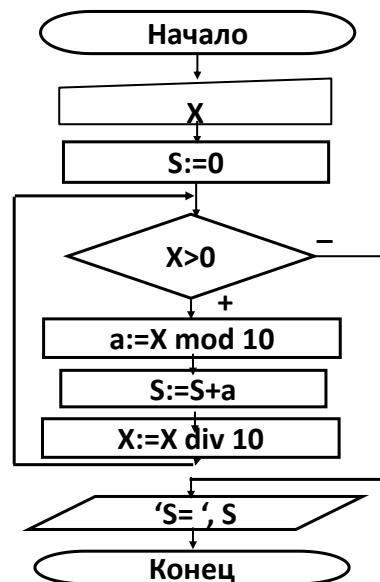

Ниже записан алгоритм. После выполнения алгоритма было напечатано 3 числа. Первые два напечатанных числа – это числа 9 и 81. Какое наибольшее число может быть напечатано третьим?

```

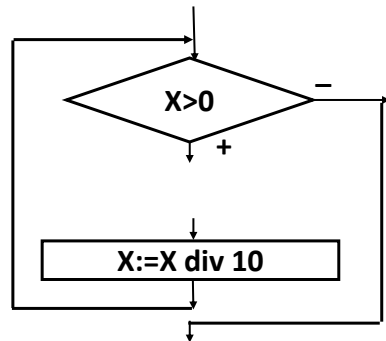
var x, y, z: integer;
  r, a, b: integer;
begin
  readln(x, y);
  if y > x then begin
    z:= x; x:= y; y:= z;
  end;
  a:= x; b:= y;
  while b > 0 do begin
    r:= a mod b;
    a:= b;
    b:= r;
  end;
  writeln(a); writeln(x); write(y);
end.

```

Значащие цифры числа



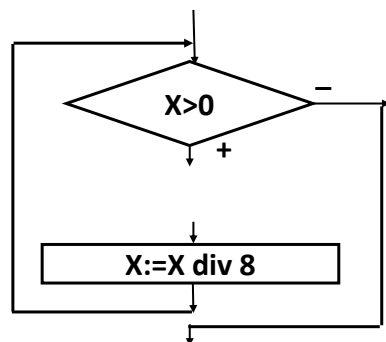
Системы счисления



```
While x>0 do  
begin  
...  
x:=x div 10  
end;
```

Программа выполняется
столько раз, сколько
значащих цифр в числе X

Системы счисления



```
While x>0 do  
begin  
...  
x:=x div 8  
end;
```

Программа выполняется
столько раз, сколько
значащих цифр в числе X,
которое записано в 8СС

Слайд 15

Ниже записана программа. Получив на вход число , эта программа печатает два числа. Укажите наименьшее из таких чисел , при вводе которых алгоритм печатает сначала 48, а потом 6.

```
var x, L, M: integer;  
begin  
  readln(x);  
  L:=1; M:=0;  
  while x > 0 do begin  
    c:= x mod 10;  
    L:=L*c;  
    if c > M  
      then M:=c;  
    x:= x div 10;  
  end;  
  writeln(L); write(M);  
end.
```

Слайд 16

Ниже записана программа. Получив на вход число , эта программа печатает два числа. Укажите наибольшее из таких чисел , при вводе которых алгоритм печатает сначала 3, а потом 7.

```
var x, L, M: integer;  
begin  
  readln(x);  
  L:=0; M:=0;  
  while x > 0 do begin  
    L:=L+1;  
    if M < (x mod 10)  
      then M:=x mod 10;  
    x:= x div 10;  
  end;  
  writeln(L); write(M);  
end.
```

Слайд 17

Ниже записан алгоритм. Укажите наименьшее из таких чисел, при вводе которых алгоритм печатает сначала 3, а потом 2.

```
var x, a, b, c: integer;  
begin  
  readln(x);  
  a:= 0; b:= 0;  
  while x > 0 do begin  
    c:= x mod 2;  
    if c = 0 then a:= a + 1  
      else b:= b + 1;  
    x:= x div 10;  
  end;  
  writeln(a); writeln(b);  
end.
```

Слайд 18

Ниже записан алгоритм. Сколько существует таких чисел, при вводе которых алгоритм печатает сначала 2, а потом 12?

```
var x, a, b: integer;  
begin  
  readln(x);  
  a:=0; b:=0;  
  while x>0 do begin  
    a:=a + 1;  
    b:=b + (x mod 10);  
    x:=x div 10;  
  end;  
  writeln(a); write(b);  
end.
```

Слайд 19

Ниже записан алгоритм. Укажите наименьшее из таких чисел , при вводе которых алгоритм печатает сначала 2, а потом 15.

```
var x, a, b: integer;  
begin  
  readln(x);  
  a:=0; b:=1;  
  while x>0 do begin  
    a:=a+1;  
    b:=b*(x mod 10);  
    x:= x div 10  
  end;  
  writeln(a); write(b)  
end.
```

Слайд 20

Ниже записана программа. Получив на вход число , эта программа печатает два числа. Укажите наибольшее из таких чисел, при вводе которых алгоритм печатает сначала 21, а потом 3.

```
var x, L, M: integer;  
begin  
  readln(x);  
  L:=1; M:=0;  
  while x > 0 do begin  
    M:=M+1;  
    if x mod 2 <> 0  
      then L:= L*(x mod 8);  
    x:= x div 8;  
  end;  
  writeln(L);  
  write(M);  
end.
```

Ниже записана программа. Получив на вход число , эта программа печатает два числа. Укажите наибольшее из таких чисел, при вводе которых алгоритм печатает сначала 3, а потом 120.

```
var x, L, M: integer;  
begin  
  readln(x);  
  L:=0; M:=1;  
  while x > 0 do begin  
    L:=L+1;  
    M:= M*(x mod 8);  
    x:= x div 8;  
  end;  
  writeln(L); write(M);  
end.
```

Рекурсия. Рекурсивные процедуры и функции

1. Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 1$$

$$F(n) = n + 1 + F(n-1), \text{ при } n > 1$$

Чему равно значение функции $F(5)$?

Способы решения

1. Ручные вычисления.
2. Excel.
3. Составление программы – рекурсивная функция.
4. Составление программы – динамическое программирование.



Ручной счёт

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 1$$

$$F(n) = n + 1 + F(n-1), \text{ при } n > 1$$

$$\begin{aligned} F(5) &= 5+1+F(4) \\ F(4) &= 4+1+F(3) \\ F(3) &= 3+1+F(2) \\ F(2) &= 2+1+F(1) \\ F(1) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(5) &= 5+1+12=19 \\ F(4) &= 4+1+7=12 \\ F(3) &= 3+1+4=8 \\ F(2) &= 2+1+1=4 \\ F(1) &= 1 \end{aligned}$$

Электронные таблицы

$F(n) = 1$ при $n \leq 1$

$F(n) = n + 1 + F(n-1)$, при $n > 1$

	A	B
1	n	$F(n)$
2	1	1
3	2	
4	3	

1

	A	B	C
1	n	$F(n)$	
2	1	1	
3	2	$=A3+1+B2$	
4	3		
5	4		

2

	A	B	C	D
1	n	$F(n)$		
2	1	1		
3	2	4		
4	3	8		
5	4	13		
6	5	19		

3

Рекурсивная функция

$F(n) = 1$ при $n \leq 1$

$F(n) = n + 1 + F(n-1)$, при $n > 1$

```

PascalABC.NET
Файл  Правка  Вид  Программа  Сервис  Модули  Помощь

«Program2.pas»
function F( n: integer ): integer;
begin
    if n <= 1 then
        F := 1;
    else
        F := n + 1 + F(n-1);
    end;
begin
    Writeln(F(5));
end.

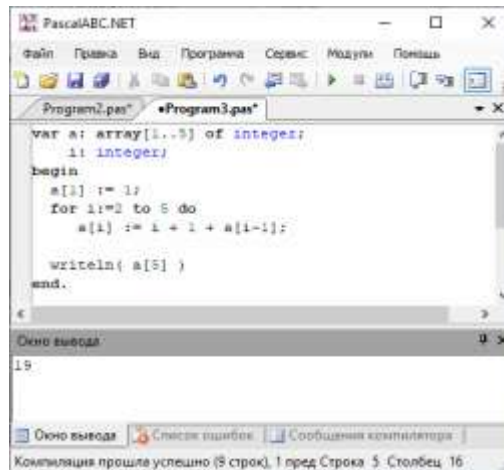
Окно вывода
19

Окно вывода  Список ошибок  Создание кода компилятора
Компиляция прошла успешно (11 строк, 1 прг, Строка 1, Столбец 1)
    
```

Динамическое программирование

$$F(n) = 1 \text{ при } n \leq 1$$

$$F(n) = n + 1 + F(n-1), \text{ при } n > 1$$



Определите, сколько символов * выведет эта процедура при вызове $F(22)$:

```
procedure F( n: integer );  
begin  
  write('*');  
  if n >= 1 then begin  
    write('*');  
    F(n-1);  
    F(n-2);  
    F(n-3);  
  end;  
end;
```

Определите, сколько символов * выведет эта процедура при вызове $F(22)$:



1. Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) * (n + 1), \text{ при } n > 1$$

Чему равно значение функции $F(5)$?

№ 6. Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(0) = 1, F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ при } n > 1$$

Чему равно значение функции $F(7)$?

№ 62. Дан рекурсивный алгоритм:

function $F(n: \text{integer}): \text{integer};$

begin

if $n > 2$ **then**

$F := F(n - 1) + F(n - 2)$

else

$F := n;$

end;

Чему будет равно значение, вычисленное алгоритмом при выполнении вызова $F(5)$?

№ 33. Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln('*');  
  if n > 0 then begin  
    F(n-3);  
    F(n div 2);  
  end  
end;
```

Сколько символов "звездочка" будет напечатано на экране при выполнении вызова F(7)?

№ 31. Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln('*');  
  if n > 0 then begin  
    F(n-2);  
    F(n div 2);  
    F(n div 2);  
  end  
end;
```

Сколько символов "звездочка" будет напечатано на экране при выполнении вызова F(5)?

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln('*');  
  if n > 0  
    then begin  
      writeln('*');  
      F(n-2);  
      F(n div 2);  
    end  
end;
```

Сколько символов "звездочка" будет напечатано на экране при выполнении вызова F(7)?

№ 39. Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n > 0 then begin  
    F(n-2);  
    F(n-1);  
    F(n-1);  
  end;  
  writeln('*');  
end;
```

Сколько символов "звездочка" будет напечатано на экране при выполнении вызова F(5)?

№ 44. Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  write(n);  
  if n < 6 then begin  
    F(n+2);  
    F(n*3)  
  end  
end;
```

Найдите сумму чисел, которые будут выведены при вызове F(2).

№ 51. Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 6 then begin  
    F(n+2);  
    write(n);  
    F(n*3)  
  end  
end;
```

Найдите сумму чисел, которые будут выведены при вызове F(2).

Обход деревьев

Что выведет программа
при вызове F(2)?

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  write(n);  
  if n < 5  
  then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3)  
  end  
end;
```

Что выведет программа
при вызове F(2)?

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n < 5  
  then begin  
    write(n);  
    F(n + 1);  
    F(n + 3)  
  end  
end;
```

Обход деревьев

Что выведет программа
при вызове F(2)?

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n < 5  
  then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3)  
  end;  
  write(n);  
end;
```

Что выведет программа
при вызове F(2)?

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n < 5  
  then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3)  
  end;  
  write(n);  
end;
```


Что наша жизнь? Игра!

А. С. Пушкин

**Решение задач ЕГЭ высокого уровня.
Игровые стратегии №19-21**



**Кодификатор элементов содержания и
требований к заданиям № 19-21**

Что проверяет	Умение построить дерево игры по заданному алгоритму и обосновать выигрышную стратегию
Элементы содержания	Цепочки (конечные последовательности), деревья, списки, графы, матрицы (массивы), псевдослучайные последовательности
Требования к уровню подготовки	Строить информационные модели объектов, систем и процессов в виде алгоритмов
Уровень сложности	Высокий
Максимальный балл / время	3 / 30 минут

1. Теория игр.
2. Игры с полной информацией.
3. Игры с неполной информацией.
4. 2 кучи камней.

Теория игр

Игровые модели описывают соперничество двух и более сторон, каждая из которых стремится к выигрышу (цели участников находятся в противоречии).

Теория игр – раздел прикладной математики, занимающийся построением и изучением игровых моделей.

 Какая задача?

Задача: найти стратегию (алгоритм игры), которая позволит получить лучший (оптимальный) результат, если соперники играют безошибочно.

Игровые стратегии

Игры с полной информацией: можно определить по начальной позиции кто должен выиграть.

Игры с неполной информацией: можно определить, при каких начальных позициях игрок имеет выигрышную стратегию и каким ходом он победит при любой игре противника.

Позиции:

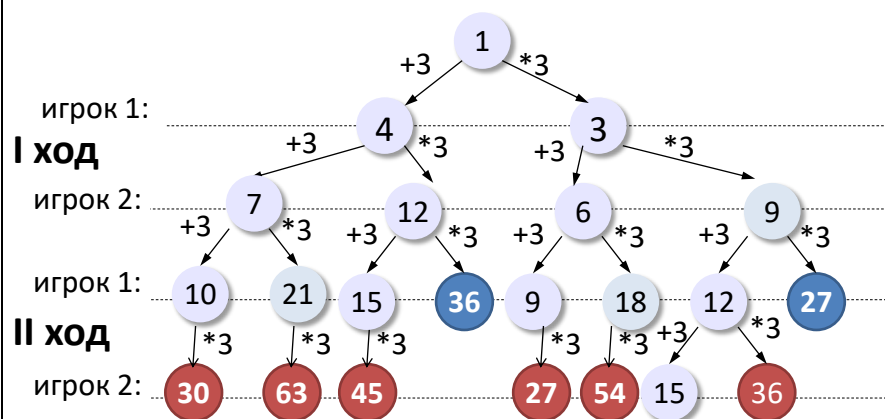
- **проигрышные** – все возможные ходы ведут в выигрышные позиции
- **выигрышные** – хотя бы один ход ведёт в проигрышную позицию

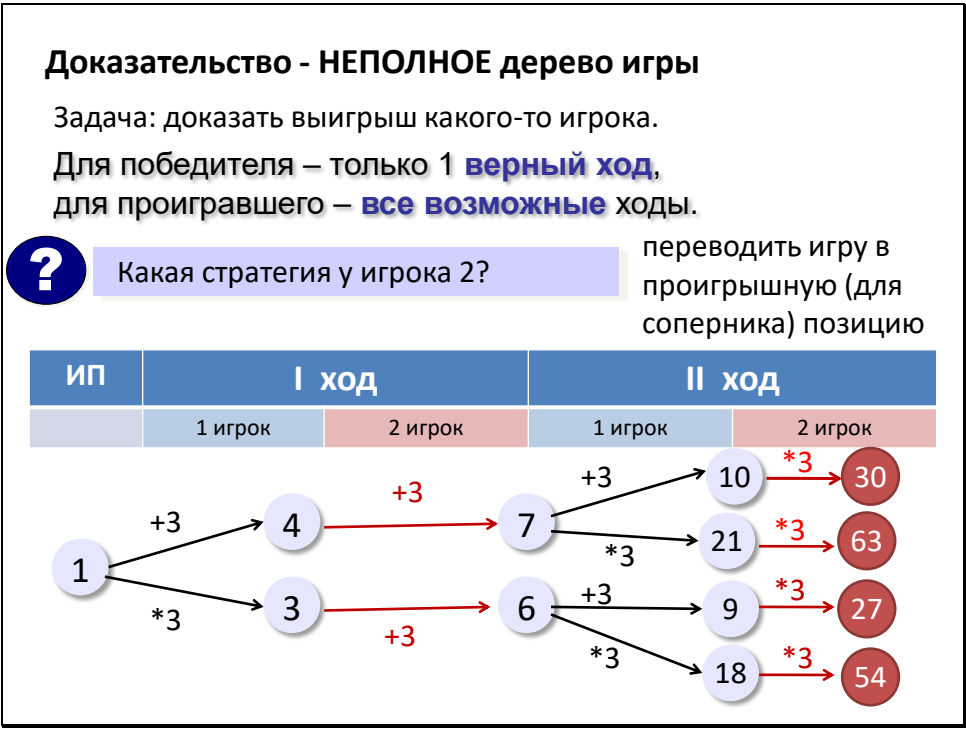
Полное дерево игры

В начале игры S камней. $S=1$.

Ходы: «**+3**» (увеличить на 3) и «***3**» (увеличить в 3 р.)

Выигрыш: получить ≥ 24 камней.



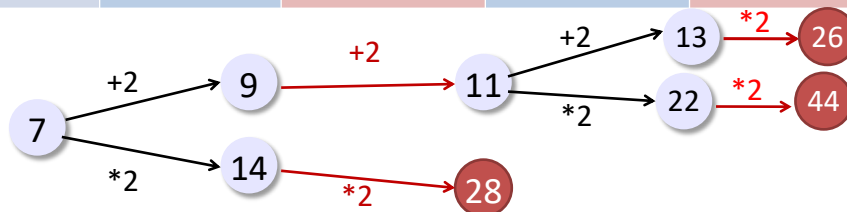


Задачи

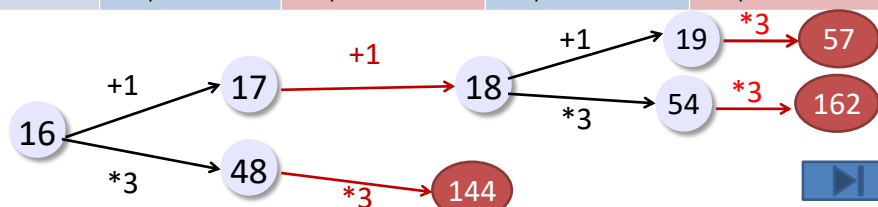
1. В начале игры S камней. Ходы: «+2» (добавить 2) и «*2» (удвоить). Выигрыш: получить ≥ 25 камней. $S = 7$
Определить игрока, имеющего выигрышную стратегию.
2. В начале игры S камней. Ходы: «+1» (добавить 1) и «*3» (утроить). Выигрыш: получить ≥ 55 камней. $S = 16$
Определить игрока, имеющего выигрышную стратегию.
3. В начале игры S камней. Ходы: «+2» (добавить 2), «+3» (добавить 3) и «*2» (удвоить).
Выигрыш: получить ≥ 30 камней. $S = 9$
Определить игрока, имеющего выигрышную стратегию.
4. **Игра Баше.** В начале игры S ($S \leq 15$) камней.
Ходы: «-1» (взять 1), «-2» (взять 2) и «-3» (взять 3).
Проигрыш: взять последний камень.
Построить дерево игры для $S = 12$.

Проверка

ИП	I ход		II ход	
	1 игрок	2 игрок	1 игрок	2 игрок



ИП	I ход		II ход	
	1 игрок	2 игрок	1 игрок	2 игрок



Анализ выигрышных и проигрышных позиций

В начале игры - S камней ($1 \leq S \leq 23$).

Ходы: «+3» (увеличить на 3) и «*3» (увеличить в 3 р.)

Выигрыш: получить ≥ 24 камней.

$3 * S \geq 24$
 $S \geq 8$

Задача

В начале игры S камней. Ходы: «+1» (добавить 1) и «*2» (удвоить). Выигрыш: получить ≥ 14 камней.

выигрыш за 1 ход

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	x_3	B_3	B_2	x_2	B_2	x_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1

Неполное дерево игры

Задача: доказать выигрыш какого-то игрока.

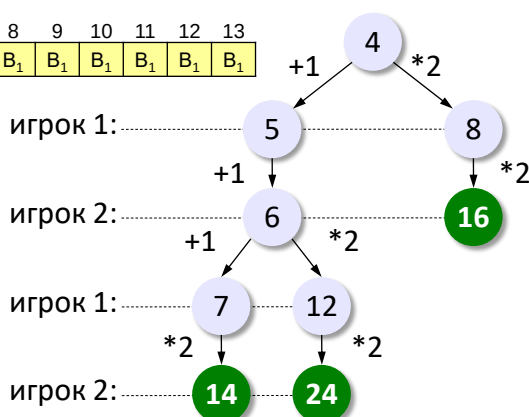
Для победителя – только 1 **верный ход**, для проигравшего – **все возможные** ответы.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	x_3	B_3	B_2	x_2	B_2	x_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1



Какая стратегия у игрока 2?

переводить игру в проигрышную (для соперника) позицию



Задача 1

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится **не менее 73**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 73 камня или больше.

Игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Например, при начальных позициях (6, 34), (7, 33), (9, 32) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

Задание 19

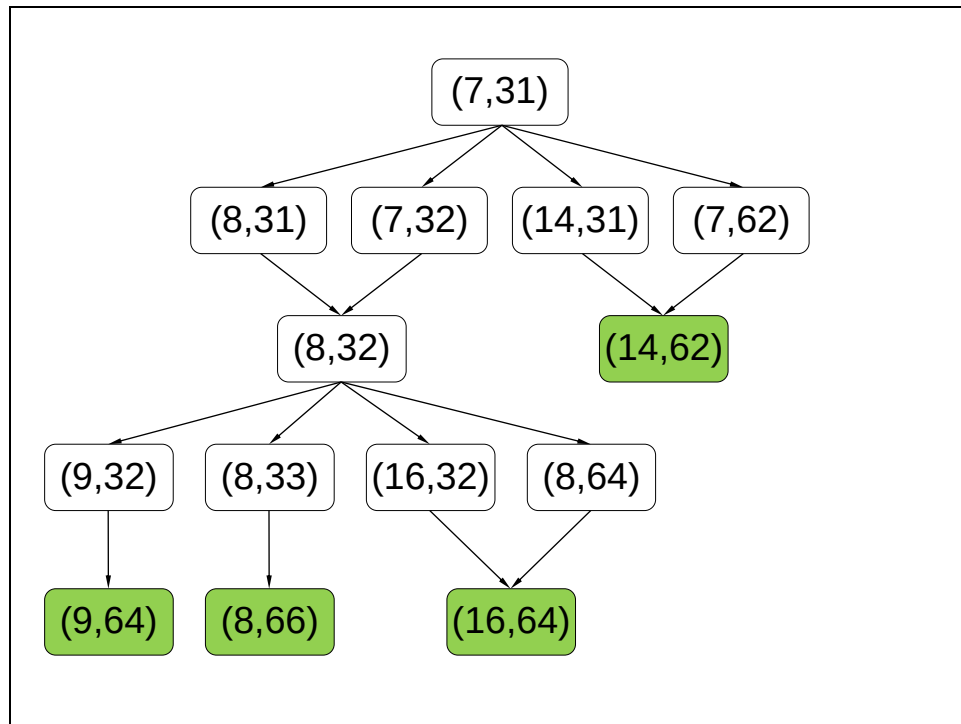
Для каждой из начальных позиций (6, 33), (8, 32) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 20

Для каждой из начальных позиций (6, 32), (7, 32), (8, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 21

Для начальной позиции (7, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.



Задача 2

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее **55**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 55 или больше камней. В начальный момент в первой куче было **5** камней, во второй куче – **S** камней; $1 \leq S \leq 49$.

Слайд 19

Задание 19

а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть за один ход, и соответствующие выигрывающие ходы. Если при некотором значении S Петя может выиграть несколькими способами, достаточно указать один выигрывающий ход.

б) Сколько существует значений S , при которых Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом?

Задание 20

Укажите такое значение S , при котором у Пети есть выигрившая стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанного значения S опишите выигрившую стратегию Пети.

Задание 21

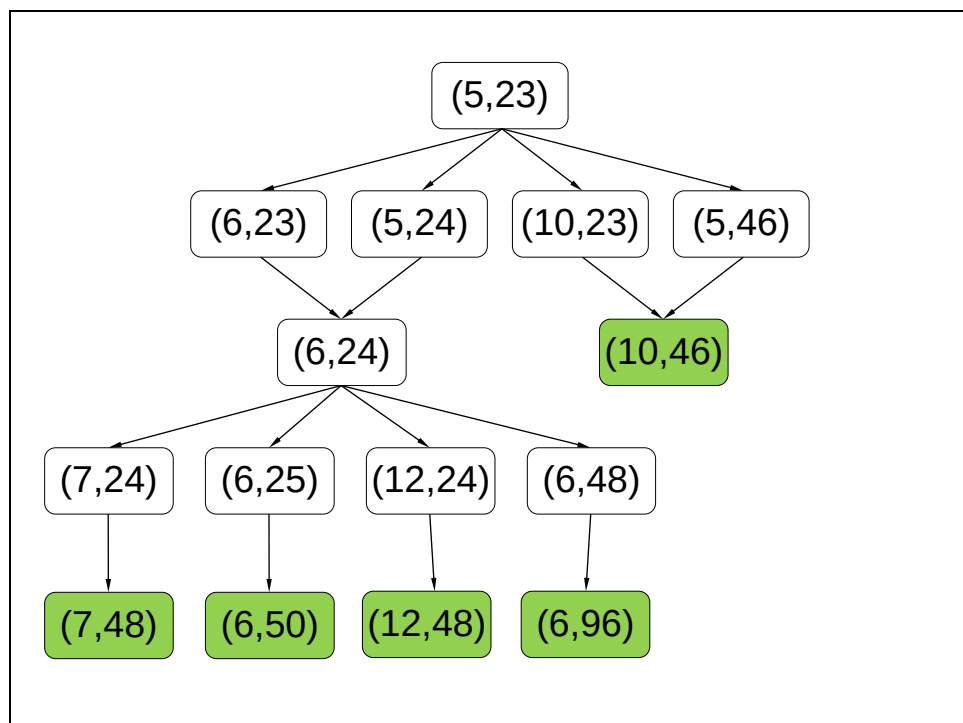
Укажите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрившая стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрившую стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрившей стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рисунке на рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

Слайд 20



КЕГЭ 2021
№ 15. Значение логических
выражений. Делимость

Кодификатор

элементов содержания и требований к уровню
подготовки выпускников ОО

Проверяемые элементы содержания:

Знание основных понятий и законов
математической логики

1.5.1 Высказывания, логические операции,
кванторы, истинность высказывания

Проверяемые умения

1.1.7 Вычислять логическое значение сложного
высказывания по известным значениям
элементарных высказываний

Демо-2021

Для какого наибольшего натурального числа A
формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает
значение 1 при любом натуральном значении
переменной x)?

Где **ДЕЛ**(n, m) утверждение «натуральное число n
делится без остатка на натуральное число m ».

Делители

Делители числа:

12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12

18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18

Простые делители:

12 : 2, 2, 3

18 : 2, 3, 3

Наибольший общий делитель

НОД(12, 18)=6 {2, 2, 3} $\cap$ {2, 3, 3}={2, 3}

Наименьшее общее кратное

НОК(12, 18)=36 {2, 2, 3} $\cup$ {2, 3, 3}={2, 2, 3, 3}

Законы алгебры логики

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A} + B = A \rightarrow B$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$A \rightarrow B = \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

$$A \rightarrow (B + C) = (A \rightarrow B) + (A \rightarrow C)$$

$$A \rightarrow B \cdot C = (A \rightarrow B) \cdot (A \rightarrow C)$$

$$(A + B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \cdot (B \rightarrow C)$$

$$A \cdot B \rightarrow C = (A \rightarrow C) + (B \rightarrow C)$$

Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Введем обозначения: $\text{ДЕЛ}(x, k) = D_k$

Перепишем выражение: $\overline{A} \rightarrow (D_6 \rightarrow \overline{D_9})$

Решение задачи:

1. Привести высказывание к одной импликации без инверсий.
2. Анализ простых делителей чисел.

1. Приведение высказывания $\bar{A} \rightarrow (D_6 \rightarrow \bar{D}_9) = 1$ к одной импликации без инверсий

1. Раскроем 1-ю импликацию, используя $A \rightarrow B = \bar{A} + B$

$$A + (D_6 \rightarrow \bar{D}_9) = 1$$

2. Раскроем вторую импликацию:

$$A + \bar{D}_6 + \bar{D}_9 = 1$$

3. По закону де Моргана заменим $\bar{D}_6 + \bar{D}_9 = \overline{D_6 \cdot D_9}$

$$A + \overline{D_6 \cdot D_9} = 1$$

4. Восстановим импликацию, используя $\bar{A} + B = A \rightarrow B$

$$D_6 \cdot D_9 \rightarrow A = 1$$

2. Анализ простых делителей

(1). $D_k \wedge D_n = D_m$, то есть множество простых делителей числа m является объединением множеств простых делителей чисел k и n
 $m = \text{НОК}(k, n)$.

(2). $D_k \rightarrow D_n$ истинно тогда и только тогда, когда множество простых делителей числа n является подмножеством простых делителей числа k .

$$D_6 \cdot D_9 \rightarrow A = 1 \qquad D_{18} \rightarrow A = 1$$

2. Анализ простых делителей

1. $D_k \cdot D_n = D_m$, где $m = \text{НОК}(k, n)$
2. $D_k \rightarrow D_n = 1 \quad (n \subseteq k)$

5. По свойству (1): $D_6 \cdot D_9 = D_{18}$

$$D_6 \cdot D_9 \rightarrow A = 1$$

$$D_{18} \rightarrow A = 1$$

6. По свойству (2): импликация будет истинна если простые делители A являются подмножеством простых делителей 18

$$A = 18$$

Алгоритм

1. Ввести подстановку $\text{ДЕЛ}(x, k) = D_k$ и переписать выражение.
2. Раскрыть импликацию. $A \rightarrow B = \bar{A} + B$
3. Упростить и преобразовать выражение к импликации без инверсий $D_k \rightarrow D_n = 1$.
4. Применить свойства (1) и (2).

1. $D_k \cdot D_n = D_m$, где $m = \text{НОК}(k, n)$
2. $D_k \rightarrow D_n = 1 \quad (n \subseteq k)$

120) Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 6)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 3)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Введем обозначения: $\text{ДЕЛ}(x, k) = D_k$

Перепишем выражение: $(\bar{A} \cdot D_6) \rightarrow \bar{D}_3$

Решение задачи:

1. Привести высказывание к одной импликации без инверсий.
2. Анализ простых делителей чисел.

125) Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 6)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 3)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

127) Для какого **наименьшего** натурального числа A формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 18) \vee \text{ДЕЛ}(x, 15))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

131) Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 12)) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 42) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 12))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

132) Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 24) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 36))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решу ЕГЭ

29663) Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(A < 50) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 10) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 12)))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решу ЕГЭ

33187) Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(90, A) \wedge (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 15) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 20)))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Мелочь, а приятно...

Если после преобразования получить выражение вида:

$$A \rightarrow (B \wedge C) \quad \longrightarrow \quad A_{\min} = \text{НОК}(B, C)$$

$$A \rightarrow (B + C) \quad \longrightarrow \quad A_{\min} = \text{МИН}(B, C)$$

$$(B \wedge C) \rightarrow A \quad \longrightarrow \quad A_{\max} = \text{НОК}(B, C)$$

$$(B + C) \rightarrow A \quad \longrightarrow \quad A_{\max} = \text{НОД}(B, C)$$