11-1-14

Фамилия Гусев

Имя Радмир

Отчество Алексеевич

Образовательное учреждение
ГБОУ СОШ №3

Класс 11

Класс, за который выполнялось задание 11

Фамилия Имя Отчество учителя/ тренера (полностью!)
Гриневич Алла Викторовна

11-1-14

1	7
2	7
3	0
4	7
5	0
Σ	21

Задача №1.

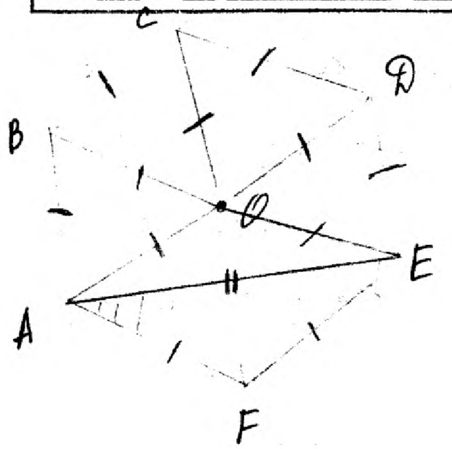

рис. 1

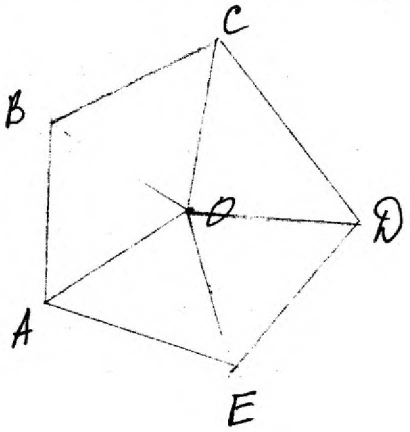

рис. 2

1) Рассмотрим окружность $r = 1$ с центром в точке O (рис. 1). Впишем в неё правильный шестиугольник $ABCDEF$. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$. По построению он выпуклый и т. O находится внутри пятиугольника. $OA = OB = OC = OD = OE = r = 1$. Поскольку $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то $AB = BC = CD = DE = r = 1$. Итого получили 9 отрезков с длиной 1.

2) Покажем, что это максимально возможное количество отрезков, имеющих длину 1. Предположим, что существует выпуклый пятиугольник ABCDE и точка O (внутри него) такие, что все десять отрезков: AB, BC, CD, DE, EA, OA, OB, OC, OD, OE равны $r = 1$. Тогда треугольники OAB, OBC, OCD, ODE, OEA – равносторонние. $\Rightarrow$

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA =$

$= \pi/6 + \pi/6 + \pi/6 + \pi/6 + \pi/6 = \frac{5\pi}{6}$, но сумма углов при точке O должна быть равна 2π.

$\Rightarrow$ наше предположение неверно (рис. 2) и не существует такого пятиугольника и точки O внутри него, что все десять отрезков имеют длину 1.

Ответ: 9 отрезков.

Задача № 4

Сначала на доске записаны числа $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$. После первой операции получим числа: $x_1 = (1-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}\cdot(1-\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 =$

$= 3-\sqrt{2}$, $y_1 = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2 = 7+3\sqrt{2}$,

$z_1 = (1-\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2 = 5$.

После второй операции получим числа:

$x_2 = (3-\sqrt{2})^2 + (3-\sqrt{2})(7+3\sqrt{2}) + (7+3\sqrt{2})^2 =$

$= 93 + 38\sqrt{2}$

$y_2 = (7+3\sqrt{2})^2 + 5(7+3\sqrt{2}) + 5^2 = 127 + 57\sqrt{2}$.

$z_2 = (3-\sqrt{2})^2 + 5(3-\sqrt{2}) + 5^2 = 51 - 11\sqrt{2}$.

После третьей операции получим числа:

$x_3 = (93+38\sqrt{2})^2 + (93+38\sqrt{2})(127+57\sqrt{2}) + (127+57\sqrt{2})^2 =$

$= a + b\sqrt{2}$, где a, b – целые положит. числа

$y_3 = (127+57\sqrt{2})^2 + (127+57\sqrt{2})(51-11\sqrt{2}) + (51-11\sqrt{2})^2 =$

$= c + d\sqrt{2}$, где c, d – целые положит. числа

$d = 2\cdot 127\cdot 57 - 127\cdot 11 + 57\cdot 51 - 2\cdot 51\cdot 11 =$

$= 14866$.

$z_3 = (93+38\sqrt{2})^2 + (93+38\sqrt{2})(51-11\sqrt{2}) + (51-11\sqrt{2})^2 =$

$= e + f\sqrt{2}$, где $f = 2\cdot 93\cdot 38 - 93\cdot 11 + 38\cdot 51 - 2\cdot 51\cdot 11 =$

$= 6861$.

Уже после третьей операции получаем тройку чисел вида $a+b\sqrt{2}$, $c+d\sqrt{2}$, $e+f\sqrt{2}$, где a, b, c, d, e, f – целые положительные числа.

Тогда при следующей операции получим числа вида:

$(a+b\sqrt{2})^2 + (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2})^2 =$

$= a^2 + 2b^2 + ac + 2bd + c^2 + 2d^2 + \sqrt{2}(2ab + ad + bc + 2dc)$,

которые при положит. a, b, c, d, e, f не могут быть рациональными, поскольку $2ab + ad + bc + 2cd > 0$. Очевидно, что числа вида $a + b\sqrt{2}$, где a, b – целые, будут рациональными только при $b = 0$.

Пусть $a + b\sqrt{2}$ – рациональное число, a – целое. Значит b – рациональное. Если $b \neq 0$, получим, что $b\sqrt{2}$ – рациональное. Противоречие.

Ответ: нет, не могут.

7

11-1-14

Задача №2. (+) 7

Без ограничения общности рассмотрим первый и второй столбец таблицы.

Пусть число нулей в первом столбце x_1, а число единиц $y_1 = 1001 - x_1$, тогда по условию $x_1 > y_1$. Число нулей во втором столбце — x_2, а число единиц $y_2 = 1001 - x_2$. Тогда по условию $x_2 > y_2$.

При пересечении этих столбцов произвольной строкой может получиться один из следующих четырёх вариантов пересечения: 00, 01, 10, 11. Теперь рассмотрим пересечение этих столбцов со всеми возможными строками.

Пусть у нас 'a' пересечений 00,

'b' пересечений 01, 'c' пересечений 10, 'd' пересечений 11. Тогда $a+b=x_1$, $a+c=x_2$, $c+d=y_1$, $b+d=y_2$.

Так как $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, то $x_1+x_2 > y_1+y_2$, $a+b+a+c > c+d+b+d$. $2a+b+c > 2d+b+c$, $2a > 2d$.

$a > d$ => то есть число строк пересечений, в которых стоят только нули больше пересечений, в которых стоят только единицы.

В силу произвольности выбора столбцов таблицы можно утверждать, что для любых двух столбцов таблицы число строк, в пересечении с которыми стоят только нули больше числа строк, в пересечении с которыми стоят только единицы.

Ответ: да, найдутся.

Задача №5 (−) 0

Пусть в квадрате 100×100 можно разместить n непересекающихся лодочек-трапеций, тогда $\frac{(n-1)}{2}$ выстрелов будет недостаточно. Рассм. квадрат 99×99. Лодочки будем размещать по периметру так, чтобы они примыкали друг к другу треугольничками. Тогда длина одной стороны внешнего квадрата должна равняться $3(k+1)+k = 4k+3$, поскольку трапеций с верхним основанием 3 на 1 больше, чем трапеций с верхним основанием 1.

$4k+3 = 99 \Rightarrow k = 24$, всего лодочек на одной стороне $k+1+k = 2k+1 = 49$. По периметру лодочек $\rightarrow 49 \cdot 4 = 196$, а их общая площадь равна $196 \cdot 2 = 392$. Пусть клеток или треугольников по периметру при таком размещении не останется, пок. Всего целых клеток (по периметру) $99 \times 2 + 97 \times 2 = 392$.

Если убрать клетки по периметру, останется квадрат 97×97. Его периметр пока не рассматриваем, а разместим лодочки по периметру внутреннего квадрата 95×95. В этом случае $k=23$, всего лодочек $4(2k+1)=188$. Можем разместить аналогично $4\times49+4\times47+\ldots+4\times1=4\frac{1+49}{2\cdot25}=2500$ лодочек. Разместим лодочки на оставшиеся места. На первую отрезанную часть 99×100 можно размест. не более $2\times49=98$ лодочек.

На каждый периметр вида $(4k+1)\times(4k+1)$ можно разместить $2k+2k+2k-1+2k-1=8k-2$ лодочек. $k=1,2,\ldots 24$. Всего можно разместить $98+6+14+\ldots+190=\frac{98}{1}+\frac{(6+190)}{\boxed{2\cdot24}}=$
$=2450$ лодочек.

Итого получили $2450+2500=4950$ лодочек, общая площадь кот. 9900 кв. кл. $\Rightarrow$ 4949 выстрелов не достаточно. Одним выстрелом можно потопить 2 лодочки, поэтому $\frac{4950}{2}=2475$ миним. кол-во выстрелов

Ответ: 2475.

1) Дубовик И.С.
2) Сидоров С. М.
3) Деркач Н. А.
4) Щепин А. Ю.
5) Деркач М. И.