11-2-14

Фамилия Гусев

Имя Радмир

Отчество Алексеевич

Образовательное учреждение
ГБОУ СОШ N3

Класс 11

Класс, за который выполнялось задание 11

Фамилия Имя Отчество учителя/ тренера (полностью!)
Гриневич Анна Викторовна

Задача №6.

Шифр 11-2-14

6	7
7	7
8	7
9	1
10	0
Σ	22

Заметим, что у всех выписанных дробей сумма числителя и знаменателя будет равна n и числитель в дробях принимает все значения от 0 до $(n-1)$ включительно.

Пусть $n = c \cdot d$, тогда c – натуральное и $1 \leq c \leq n$.

$d = \frac{n}{c}$

$d - 1 = \frac{n}{c} - 1$

$d - 1 = \frac{n-c}{c}$ – в этой дроби сумма числителя и знаменателя равна n и $0 \leq n - c \leq n - 1 \Rightarrow (d-1)$ обязательно будет равно одной из дробей, выписанных на доске Петей.

Что и требовалось доказать.

Задача №7. + 7

Поскольку $f(x)$ на всей числовой оси и для любых x, y выполняется $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$, то для любого x будет верно

$$f(x) + f(x) = 2f\left(\frac{x+x}{2}\right)f\left(\frac{x-x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2f(x) = 2f(x) \cdot f(0) \Rightarrow$$

либо $f(x)$ тождественно равна нулю, в этом случае $f(x)$ – чётная функция, либо $f(0) = 1$.

Рассм. случай $f(0) = 1$: для любого x выполняется:

$$f(x) + f(-x) = 2f\left(\frac{x+(-x)}{2}\right)f\left(\frac{x-(-x)}{2}\right),$$

$$f(x) + f(-x) = 2f\left(\frac{x-x}{2}\right)f\left(\frac{x+x}{2}\right),$$

$f(x) + f(-x) = 2f(0)f(x)$, т.к. $f(0) = 1$, то

$f(x) + f(-x) = 2f(x)$, $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ поскольку выполняется для любого x, то $f(x)$ – чётная функция.

7

Ответ: да, $f(x)$ – обязательно чётная функция.

Шифр 11-2-14

Задача $\boxed{№8}$ (78)

Предположим обратное. Пусть для всех $n > 10^{2018}$ сумма простых чисел, меньших n, имеет общие делители с n.

Выпишем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$

$$S_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$$

Возьмём число $n = p_{k+1}$, где $p_{k+1} > 10^{2018}$.

Пусть S_k имеет общий делитель с n, значит S_k делится на n, поскольку n - простое число. Тогда $S_k = p_{k+1} \cdot d_k$ — верно для всех k таких, что $p_{k+1} > 10^{2018}$

$$(d_{k+1})(p_{k+2}) = S_{k+1} = S_k + p_{k+1} = (p_{k+1})(d_k) + p_{k+1} =$$
$$= (d_k + 1)\, p_{k+1}.$$

$$p_{k+2} > p_{k+1} \Rightarrow d_{k+1} < d_k + 1.$$

Числа d_i целые, поэтому строгое неравенство имеем право записать в виде нестрогого: $d_{k+1} \leq d_k$. Таким образом последовательность d_i не возрастает. Докажем, что в этой последовательности каждое число $d > 1$ может встретиться ~~конечное~~ число раз.

Пусть $d_k = d_{k+1} = \ldots = d_{k+m} = d$.

$$p_{k+1+m} = \left(\frac{d+1}{d}\right) p_{m+k} = \ldots = \left(\left(\frac{d+1}{d}\right)^m\right) p_{k+1}.$$

d и $d+1$ взаимно простые, а число p_{k+1} может делиться только на конечную степень d. Докажем, что начиная с какого-то простого числа p_i, числа $d_i = 1$. Значит $p_{i+1} = S_i$. Теперь мы можем взять число $n = p_{i+1} + 1$. Для такого n сумма простых меньших чисел равна S_i. И это число n будет взаимно просто с S_i. Противоречие.

(продолжение задачи №8)

Шифр 11-2-14

Также можно доказать, что такое равенство $p_{i+1} = S_i$ невозможно, что не требуется. Доказали возможность существования n, что и требовалось.

Задача $\boxed{№ 9.}$

У каждого ребенка не менее трёх друзей. Докажем от противного: пусть у ребёнка A в друзьях только реб B и реб. C. Тогда при выделении реб. B реб. A должен попасть в группу из трёх детей, где каждый дружит с каждым. Но тогда получается, что ребёнок A дружит с ребёнком B и ещё с двумя детьми из группы, в которую он попадает, что противоречит нашему предположению о том, что у него только два друга.

Пусть A дружит ровно с тремя другими - B, C, D. Докажем, что тогда все они дружат друг с другом. Выберем B. Тогда в группе A, C, D все дружат друг с другом, иначе A окажется в другой группе из трёх детей и у него будет больше трёх друзей. Аналогично выберем C и D. Получим, что в группах A, B, D и A, B, C все дружат друг с другом. Значит среди группы детей A, B, C, D все дружат друг с другом.

Построим пример с 198 парами друзей. Ребёнок A дружит со всеми детьми, и у каждого из 99 других детей ровно по три друга. Всего получим:

$$\frac{(99+3)\,99}{2} = 198 \text{ пар друзей}$$

Ответ: 198 пар.

продолж.

Пояснение к задаче № 9.

Пример со 198 парами.

(где каждый дружит с каждым)

Выбрали одного человека, построили 33 группы, получили 99 связей. Теперь выбираем поочерёдно из каждой группы по одному человеку. Каждый такой перевыбор добавит не менее двух новых связей (для создания новых групп по три):

99 + 66.

Теперь выбираем ещё по одному человеку из каждой группы.* Появится не менее одной новой связи. Итого связей дружбы: 99 + 66 + 33 = 198.

*ранее не выбранного

Пример есть выше: если выбрали ребёнка из группы, то вместо него добавляем ребёнка А, у которого 99 связей дружбы с остальными.

1

6) Дубовик И. С.
7) Деркач М. И.
8) Деркач М. И.
9) Щепин А. Ю.
10) Деркач Н. А.