10.2.33

Фамилия Афонин

Имя Глеб

Отчество Константинович

Образовательное учреждение
ГБОУ СОШ №23

Класс 10

Класс, за который выполнялось задание 10

Фамилия Имя Отчество учителя/ тренера (полностью!)
Быкова Вера Петровна

Шифр

10.2.33

(10.6.) Упорядочим числа, выбранные Петей, следующим образом:

$\frac{n-1}{n-(n-1)}, \frac{n-2}{n-(n-2)}, \dots \frac{3}{n-3}, \frac{2}{n-2}, \frac{1}{n-1}, \frac{0}{n}$

Назовём полученную прогрессию S, а произвольный член прогрессии a_k, где $k \in N$, $k \leq n$ (поскольку прогрессия конечна и оканчивается на $a_n = \cancel{\frac{n-n}{n-n}}\ \frac{0}{n}$), тогда, зная, что каждый последующий член прогрессии обладает ~~знаменателем~~ меньшим знаменателя предыдущего члена на 1 (единицу), а также число, вычитаемое из n в знаменателе с каждым ~~разо~~ шагом (переходом от одного члена прогрессии к следующему) уменьшается на 1 (единицу), можем утверждать, что:

$a_k = \frac{n-k}{n-(n-k)} = \frac{n-k}{n-n+k} = \frac{n-k}{k} \cancel{\cdot(-1)}$

Если $n \vdots d$ (по условию), то справедливо $n = dl$, где l - некоторое число. Т.к. $n \in N, d \in N, n \vdots d$, то $l \leq n$, $l \in N$, выразим l и d:

$\cancel{l = \frac{n}{d}}$ $d = \frac{n}{l}$.

Тогда выражение $d-1$, существование k-рого в последовательности S нужно доказать (если $d-1$ существует в дробях, выписанных Петей, то $d-1$ существует в S, поскольку множество чисел, выписанных Петей, и мн-во S состоят из одного и того же набора чисел и могут различаться лишь расстановкой), можно записать в виде: $d-1 = \frac{n}{l} - 1 = \frac{n-l}{l}$, таким образом, т.к. $k \in N$ и $k \leq n$, а также $l \in N$ и $l \leq n$, то можно утверждать, что дробь вида $\frac{n-k}{k}$ для которой $k = l$ и будет являться искомой, а такая дробь точно существует, т.к. ~~$l \in [0;n]$ и $l \leq n$~~ $l \in N$ и $l \leq n$, а также $k \in N$ и $k \leq n$, иначе говоря k может принимать любое из значений на области определения k (своей) и l, а l для заданного числа n является константой и принадлежит области определения l (своей) и k, а также области определения l и k совпадают, ЧТД.

(10.7.) Неверно, т.к. можно построить четырёхугольник из 4-х одинаковых треугольников, стороны которого не будут параллельны ~~по следующему алгоритму~~ (см 2 лист чистовика):

(10.7. продолжение) 1) Построим треугольник, один из углов к-рого равен 90°, а также катет a меньше гипотенузы d в 2 (два) раза.

2) Отметим середину гипотенузы d и проведём к ней перпендикуляр h (перпендикуляр h не лежит „внутри" треугольника) длиной, равной длине второго катета b построенного в „1)" треугольнике ($h = b$).

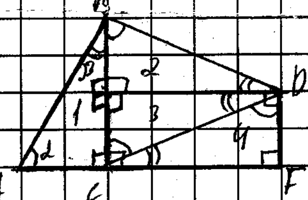
3) Соединим точку пересечения катетов a и b с гипотенузой d с концом отрезка h, не принадлежащим d. Полученные отрезки будут равны между собой и равны гипотенузе d из теоремы Пифагора (см. рис.):

$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2+b^2}$

$d^2 = h^2 + (0{,}5d)^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2+b^2}$,

4) Достроим ещё один треугольник.

Чтобы построить искомый четырёхугольник, используем прямоугольные треугольники, один из катетов которых в 2 (два) раза меньше другого (см. рис.):



где 1, 2, 3, 4 — номера треугольников.

На данном рисунке стороны треугольников нарисованы с нарушенной пропорциональностью, т.к. длины прилежащих рёбер клеток не совпадают, однако условие выполняется:

Пусть $\angle A = \angle EBD = \angle ECD = \angle CDF = \alpha$ (углы равны по построению), а также $\angle ABC = \angle BDE = \angle CDE = \angle DCF = \beta$ (углы равны по построению).

Тогда $\alpha + \beta = 90°$ (как сумма острых углов прямоуг. треугольника).

Также пусть $AC = EC = BE = DF = a$, тогда $BC = DE = CF = 2a$ (по построению).

Таким образом $\angle BEC = \angle BED + \angle CED = 90° + 90° = 180° \Rightarrow BC$ — отрезок, к-рый можно записать в виде суммы двух отрезков BE и EC ($BC = BE + EC$), что не противоречит построению, т.к. $BC = 2a$, а $BE + EC = a + a = 2a$.

$\angle ACF = \angle ACB + \alpha + \beta = 90° + 90° = 180°$, т.е. AF — отрезок (а не ломаная).

Таким образом мы доказали, что $ABDF$ — четырёхугольник, докажем теперь, что у него нет параллельных сторон (для этого достаточно доказать, что ~~все~~ хотя бы одна пара противолежащих углов $ABDF$ не состоит из углов, равных между собой ~~углы четырёхугольника — различны~~) (см. 3 лист чистовика):

$\alpha \neq \beta$, т.к. в противном случае катеты треугольников 1, 2, 3, 4 равны, что противоречит построению. $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$, как острые углы.

$\angle A = \alpha$; $\angle ABD = \alpha + \beta = 90°$; $\angle BDF = 2\beta + \alpha$; $\angle F = 90°$

~~Все углы различны, за исключением $\angle ABD$ и $\angle F$, однако~~

Таким образом $\angle A \neq \angle BDF$, ЧТД.

Примечания: 1) треугольники 3 и 4 можно можно расположить иначе, если сохранится прямоугольник CEDF.

2) Данного выше доказательства через неравные углы достаточно, т.к. параллелограмм образуется лишь при попарном равенстве противоположных углов, а у трапеции сумма соседних углов, прилежащих параллельным основаниям, равна 180°, чего в построенном четырёхугольнике не наблюдается ($\angle A + \angle ABD = \alpha + 90° \neq 180°$; $\angle ABD + \angle BDF = 90 + 2\beta + \alpha = 90° + 90° + \beta = 180° + \beta \neq 180°$, $\angle BDF + \angle F = 2\beta + \alpha + 90° = 180° + \beta \neq 180°$; $\angle A + \angle F = \alpha + 90° \neq 180°$)

15

10.8. Назовём клетки соседними, если они имеют общее ребро.

Из условия понятно, что можно расположить несколько гепардов в ряд в соседних ~~их~~ ~~клетках~~, однако нельзя расположить гепардов в форме креста (см. рис.)

На данном рисунке: Г - фигура гепарда, \\\\ - клетки, которые бьют Г, ~~расположенные~~ расставленные в линию по вертикалям; //// - клетки, к-рые бьют гепардов, ~~расположенные~~ расставленные в линию по горизонталям. (клетка над верхним левым Г ~~бьёт~~ закрашена только ////).

Подобное ~~положение~~ расположение обеспечивает максимальную плотность фигур (плотность в данном случае - кол-во Г на единицу площади). Иные расположения могут обеспечить равную или меньшую плотность (но не большую).

Если расположить ряд гепардов у края доски, то ~~доску~~ на доске останется место 990×1000, на которые можно расставить фигуры. Расположив ряд из гепардов, параллельно первому, площадь, доступная для размещения станет 980×1000. Данные действия можно повторять вплоть до заполнения доски. На заполненной доске будет находиться $S = ч(a:b)$, если $a \vdots b$, где ч - количество фигур в ряду, b - ширина, занимаемая рядом, a - длина стороны доски, а также (включая к-рой располагаются фигуры) $S = ч\cdot(a:b) + ч$ в случае, если $a \not\vdots\, b$ (см. 4 лист чистовика):

Шифр

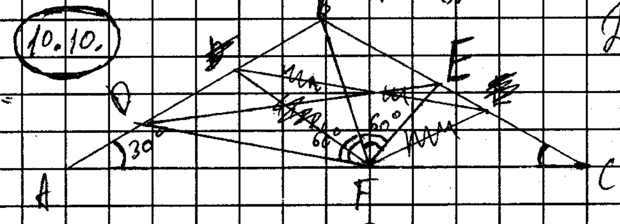
10.2.33

Для данной доски $a = 1000 \Rightarrow a = 1000$ (т.к. в ряд можно поставить количество гепардов, численно равное кол-ву клеток в ряду, что было обосновано рисунком выше), $b = 10 = 9+1$, где 1 - клетка x (занимаемая гепардом), а 9 - клетки, которые бьются каждым новым рядом (уж ранее битые клетки не учитываются), таким образом, т.к. $a \vdots b$ $(1000 : 10 = 100)$

$S = 1000 \cdot (1000 : 10) = 1000 \cdot 100 = 100000$

Ответ: 100000 фигур.

10.10.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle C = 30^\circ$, $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in AC$, $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$; $P_{\triangle ABC} = p$, $P_{\triangle DEF} = p_1$

Доказать: $p \le 2p_1$

Доказательство:

Если $AF \ne FC$, то:

При стремлении положения точки F к вершинам треугольника A или C (оба случая равносильны, т.к. $\angle A = \angle C = 30^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ - равнобедренный), то длина отрезков FD и DE стремится к длине отрезка AC, а длина EF стремится к 0 (нулю).

Таким образом, если $AF \ne FC$, то p_1 больше, чем минимальное значение p_1.

Минимальное значение p_1 достигается при $AF = FC$.

Тогда $DF = FE$ в силу симметрии (BF - ось симметрии).

Если $AF = FC$, то $BF \perp AC$ (по св-ву медианы, проведённой к основанию равнобедренного треугольника ABC), также $\angle ABF = \angle CBF$.

Из $\triangle BFC$, где $\angle F = 90^\circ$ (т.к. $BF \perp AC$):

$FE = BE = CE = 0{,}5\,BC$.

Аналогично $FD = 0{,}5\,AB$.

DE - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow DE = 0{,}5\,AC$, тогда

$p_1 = 0{,}5\,BC + 0{,}5\,AB + 0{,}5\,AC = 0{,}5(AB + BC + AC) = 0{,}5\,p \Rightarrow p = 2p_1$.

Случай $AF \ne FC$ был рассмотрен выше $\Rightarrow$ $p \le 2p_1$, ЧТД.

7 7

7 7

7 7

0 0

0 0

21

6 Больбух В.В

7 Лубова О.В

8 Глушакова М.И

9 Садовая Т.А.

10 Холодова Ю.Н.

Уруков