Методическая разработка
«Решение тригонометрических уравнений»

Автор разработки:
Астраханцева Елена Александровна,
учитель математики ГБОУ «СОШ № 14»

Рекомендовано к публикации на официальном сайте ГБОУ ДПО «Севастопольский центр развития образования» решением Совета ГБОУ ДПО «Севастопольский центр развития образования», протокол № 8 от 11.12.2017 г.

Содержание

Введение

Основная цель обучения математике в школе – обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых для изучения смежных дисциплин, продолжения образования и применения полученных знаний в будущей профессиональной деятельности и повседневной жизни.

Тема «Тригонометрия» в школьном курсе алгебры и начал анализа включает изучение формул, свойств тригонометрических функций, решение уравнений, неравенств и их систем. Как никакая другая она способствует развитию у школьников ассоциативной памяти и логического мышления.

В курсе алгебры и начал анализа рассматриваются некоторые основные методы решения тригонометрических уравнений, которых может быть недостаточно для успешной сдачи экзаменов по математике.

Ограниченность времени на изучение данной темы требует от учителя четкости в изложении теоретического материала, а также значительного количества однотипных заданий для отработки вырабатываемых навыков.

В работе расширена классификация тригонометрических уравнений в зависимости от методов их решения, рассмотрены некоторые частные случаи решения уравнений и варианты решения одного и того же уравнения разными способами.

Таким образом, ***целью*** настоящей работы является:

- расширение изложенной в учебнике классификации методов решения тригонометрических уравнений;
- разработка раздаточного материала по теме с элементами опорного конспекта и упражнениями для самостоятельного решения и работы в классе;
- подготовка учащихся к ГВЭ и ЕГЭ по математике.

1. Методы решения тригонометрических уравнений

1.1. Решение простейших тригонометрических уравнений

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида: $\sin x = a,\ \cos x = a,\ tg\, x = a,\ ctg\, x = a.$

Уравнение $\sin x = a$ может иметь решения только при $|a| \le 1$. Решение этого уравнения находится по обобщенной формуле:
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$ где $n \in Z$ и $|\arcsin a| \le \frac{\pi}{2}$. При решении уравнений этого типа полезно помнить, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Частные случаи:

1. Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ где $n \in Z$.
2. Если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ где $n \in Z$.
3. Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n,$ где $n \in Z$.

Уравнение $\cos x = a$ может иметь решения только при $|a| \le 1$. Решение этого уравнения находится по обобщенной формуле:
$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$ где $n \in Z$ и $0 \le \arccos a \le \pi$. При решении уравнений этого типа полезно помнить, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Частные случаи:

1. Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n,$ где $n \in Z$.
2. Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n,$ где $n \in Z$.
3. Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ где $n \in Z$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом значении a. Решение этого уравнения находится по обобщенной формуле:
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,$ где $n \in Z$ и $|\operatorname{arctg} a| < \frac{\pi}{2}$. При решении уравнений этого типа полезно помнить, что $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решения при любом значении a. Решение этого уравнения находится по обобщенной формуле:

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, где $n \in Z$ и $0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$. При решении уравнений этого типа полезно помнить, что $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

а) $\cos(2 - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р е ш е н и е. Используя свойство четности-нечетности тригонометрических функций, приведем аргумент к виду $kx - \alpha$.

$$\cos(3x - 2) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$3x - 2 = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,$$

$$3x - 2 = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, \quad \text{где } n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n,\ \ n \in Z.$

б) $\sin\frac{3\pi}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. $\frac{3\pi}{x^2} = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,$

$$\frac{3\pi}{x^2} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x^2 = \frac{3}{(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{6} + n},$$

$$x^2 = \frac{18}{6n + (-1)^{n+1}},$$

$$x = \pm 3\sqrt{\frac{2}{6n + (-1)^{n+1}}}, \quad \text{где } n \in N.$$

Ответ: $x = \pm 3\sqrt{\frac{2}{6n + (-1)^{n+1}}},\ \ n \in N.$

1.2. Уравнения, сводимые к алгебраическим

К данному типу уравнений относятся такие тригонометрические уравнения, в которых одно и то же выражение с переменной входит под знак одноименных тригонометрических функций. При введении новой переменной для обозначения этой функции, получается, как правило, алгебраическое уравнение *n*-ой степени или дробное рациональное уравнение.

Для необходимых тождественных преобразований используют следующие формулы:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

3) $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

4) $ctgx = \dfrac{1}{tgx}$

5) $1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

6) $1 + ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

7) $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

8) $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

9) $tg 2x = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x}$

10) $\sin 2x = \dfrac{2tgx}{1 + tg^2 x}$

11) $\cos 2x = \dfrac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$

12) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

13) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

14) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

15) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

16) Формулы приведения

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$2cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0.$

Р е ш е н и е. $2(1 - sin^2 3x) + \sin 3x - 1 = 0$

$2sin^2 3x - \sin 3x - 1 = 0,$

Пусть $\sin 3x = t$, тогда

$2t^2 - t - 1 = 0$, откуда

$t_1 = 1,$ $\qquad t_2 = -\frac{1}{2}.$

$\sin 3x = 1,$ $\qquad \sin 3x = -\frac{1}{2},$

$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $\qquad 3x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z,$ $\qquad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{1}{3}\pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z,$ $\quad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{1}{3}\pi k, k \in Z.$

1.3. Однородные уравнения

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$,

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0,$$

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0 \text{ и т.д.}$$

называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов такого уравнения одинакова. Эта степень называется степенью однородного уравнения. Делением на $\cos^n x$, где n – степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции tgx.

Доказать, что выражение $\cos^n x$ в таком уравнении отлично от нуля помогут следующие рассуждения. Предположим, что $\cos x = 0$, но тогда для выполнения равенства и $\sin x = 0$, чего быть не может, т.к. синус и косинус при одном и том же значении аргумента в нуль не обращаются.

Уравнение $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ в таком виде однородным не является, но его можно привести к однородному, умножив правую часть уравнения на тригонометрическую единицу $sin^2x + cos^2x = 1$.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$4sin^2x + 2\sin x \cos x = 3.$

Р е ш е н и е. Умножим правую часть уравнения на тригонометрическую единицу. Получим

$$4sin^2x + 2\sin x \cos x = 3sin^2x + 3cos^2x,$$

$$sin^2x + 2\sin x \cos x - 3cos^2x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $cos^2x \neq 0$, получим

$$tg^2x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg} x = -3, \qquad \operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = -arctg\,3 + \pi k, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad k, n \in Z.$$

Ответ: $x = -arctg\,3 + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad k, n \in Z.$

1.4. Уравнения, решаемые разложением на множители

При решении данного типа уравнений необходимо использовать все известные способы разложения на множители алгебраических выражений:
- вынесение за скобки общего множителя;
- способ группировки;
- применение формул сокращенного умножения;
- искусственные приемы.

Необходимо также знать формулы, приведенные в разделе 1.2 и формулы:

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \pm tg\alpha tg\beta};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Примечание: в таких уравнениях запрещается деление обеих частей уравнения на выражение с переменной, т.к. это может привести к потере корней уравнения.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$3(1-\sin x)+sin^4x = 1+cos^4x.$

Р е ш е н и е. $3(1-\sin x)+sin^4x = 1+cos^4x,$

$$3(1-\sin x) = 1+cos^4x-sin^4x,$$

$$3(1-\sin x) = 1+cos^2x-sin^2x,$$

$$3(1-\sin x) = 1+\cos 2x,$$

$$3(1-\sin x) = 2cos^2x,$$

$$3(1-\sin x) = 2(1-\sin x)(1+\sin x),$$

$$(1-\sin x)(1-2\sin x) = 0,$$

$$\sin x = 1, \qquad \sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{2}+2\pi n, \qquad x = (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k,n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad x = (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, \quad k,n \in Z.$

1.5. Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноименных тригонометрических функций

Многие тригонометрические уравнения могут быть приведены к равенству одноименных тригонометрических функций. Такие уравнения решаются на основании условия равенства одноименных тригонометрических функций, т.е. тех условий, которым должны удовлетворять два угла $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, если:

- ✓ $\sin\alpha = \sin\beta$;
- ✓ $\cos\alpha = \cos\beta$;
- ✓ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$.

Данные условия выражаются теоремами.

Теорема I. Для того чтобы синусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

разность этих углов должна равняться π, умноженному на четное число, или сумма этих двух углов должна равняться π, умноженному на нечетное число.

Теорема II. Для того чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: разность этих углов должна равняться произведению π на четное число, или сумма этих углов должна равняться произведению числа π на четное число.

Теорема III. Для того чтобы тангенсы двух углов были равны, необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий: тангенс каждого из данных углов существует и разность этих углов должна равняться произведению π на целое число.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

а) $\cos 3x = \sin x$.

Р е ш е н и е. $\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

$$3x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\pi n, \quad 3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \qquad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k, n \in Z.$

б) $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Р е ш е н и е. Разделим обе части уравнения на $\operatorname{tg} 3x$. Это допустимо, т.к. в данном уравнении $\operatorname{tg} 3x \neq 0$.

$$\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} 3x,$$

$$\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right),$$

$$5x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 3x = \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}, \quad n \in Z.$$

При каждом значении $\boldsymbol{x}$ из этой совокупности каждая из частей уравнения существует.

Ответ: $x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}, \quad n \in Z.$

1.6. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Основным принципом решения таких уравнений является разложение левой части уравнения на множители и приравнивание полученного произведения к нулю. Для преобразований используют формулы:

- ✓ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;
- ✓ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
- ✓ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
- ✓ $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;
- ✓ $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;
- ✓ $ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$0{,}5(\cos 5x + \cos 7x) - cos^2 3x + sin^2 3x = 0.$

Р е ш е н и е. $0{,}5 \cdot 2\cos 6x \cos x - \cos 6x = 0,$

$\cos 6x(\cos x - 1) = 0,$

$\cos 6x = 0, \qquad \cos x = 1,$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, \qquad x = 2\pi k, \quad k, n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, \quad x = 2\pi k, \quad k, n \in Z.$

1.7. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

Для решения данных уравнений необходимо использовать формулы:

- ✓ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$;
- ✓ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;
- ✓ $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \pm tg\alpha tg\beta}$;
- ✓ $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$;
- ✓ $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$;
- ✓ $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$\sin 3x \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = \frac{1}{8}.$

Р е ш е н и е. $\sin 3x \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 6x - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{8},$

$$\sin 3x\left(\cos 6x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

$$2\sin 3x\cos 6x + \sin 3x = \frac{1}{2},$$

$$\sin 9x - \sin 3x + \sin 3x = \frac{1}{2},$$

$$\sin 9x = \frac{1}{2},$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{54} + \frac{\pi n}{9},\quad n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n\frac{\pi}{54} + \frac{\pi n}{9},\quad n \in Z.$

1.8. Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени

Для решения данных уравнений применяются формулы понижения степени:

- ✓ $sin\,^2\alpha = \frac{1-\cos}{2}$,
- ✓ $cos\,^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$2cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0.$

Р е ш е н и е. $1 + \cos 4x + \cos 10x - 1 = 0,$

$\cos 4x + \cos 10x = 0,$

$2\cos 7x \cos 3x = 0,$

$\cos 7x = 0, \qquad \cos 3x = 0,$

$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, \qquad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \;\; k, n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, \qquad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \;\; k, n \in Z.$

1.9. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

В уравнении $a\sin x + b\cos x = c$ коэффициенты ***a, b*** и ***c*** – любые действительные числа.

Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = 0$, а $\boldsymbol{c} \neq 0$, то уравнение не имеет смысла.

Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = 0$, то $\boldsymbol{x}$ – любое действительное число, т.е. уравнение обращается в тождество.

Частные случаи таких уравнений целесообразно решать следующими способами:

- ✓ Если коэффициенты a и b равны 1, то уравнение почленно делится на $\sqrt{2}$. В этом случае левая часть преобразуется по соответствующей формуле в синус или косинус суммы или разности.

- ✓ Если коэффициенты a и b равны 1 и $\sqrt{3}$ соответственно или наоборот, то уравнение почленно делится на 2. Дальнейшие преобразования аналогичны приведенным выше.

Рассмотрим уравнение $a\sin x + b\cos x = c$, у которого произвольные коэффициенты. Данный тип уравнений можно решать разными способами, помня, что оно имеет корни при условии $a^2 + b^2 \geq c^2$.

I способ (приведение к однородному):

- Преобразовать ***sinx*** и ***cosx*** по формулам двойного аргумента, коэффициент ***c*** умножить на тригонометрическую единицу.
- Решить полученное однородное уравнение.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$3\sin x + 4\cos x = 3.$

Р е ш е н и е. $3 \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\,cos^2\frac{x}{2} - 4\,sin^2\frac{x}{2} = 3sin^2\frac{x}{2} + 3cos^2\frac{x}{2}$,

$$7sin^2\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - cos^2\frac{x}{2} = 0$$

Далее уравнение решается как однородное.

II способ (метод рационализации):

- Используя формулы $\sin\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}};$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}},$$

производят замену тригонометрических функций.

- Решают полученное дробное рациональное относительно $tg\frac{\alpha}{2}$ уравнение.

- При такой замене выражение для вспомогательного неизвестного $tg\frac{\alpha}{2}$ теряет смысл при $x = \pi(2n+1)$. В результате данные корни могут быть потеряны. Следует помнить, что данные значения переменной являются корнями уравнения при условии: $c = -b$.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$3\sin x + 4\cos x = 3.$

Р е ш е н и е. $3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3,$

$1 + t^2 \neq 0$ при $t \in R,$

$6t + 4 - 4t^2 = 3 + 3t^2,$

$7t^2 - 6t - 1 = 0,$

$t = 1, \qquad t = -\frac{1}{7},$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad x = -2arctg\frac{1}{7} + 2\pi k, \quad k, n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = -2arctg\frac{1}{7} + 2\pi k, \quad k, n \in Z.$

<u>III способ (введение вспомогательного угла).</u>

Если $a^2 + b^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$ или наоборот. После введения вспомогательного угла φ уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ примет вид:

$\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x\right) = c$, откуда

$x = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n - \varphi$, где $\varphi = arctg\frac{b}{a}$.

П р и м е р ы.

Решите уравнение.

$3\sin x + 4\cos x = 3.$

Р е ш е н и е. $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} + \pi n - \varphi$, где $\varphi = arctg\dfrac{4}{3}$,

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{5} - arctg\frac{4}{3} + \pi n, n \in Z .$$

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{3}{5} - arctg\dfrac{4}{3} + \pi n, n \in Z .$

Приложение содержит раздаточный материал по теме с элементами опорного конспекта и упражнениями для самостоятельного решения и работы в классе.

Заключение

Умение решать тригонометрические уравнения в школьном курсе алгебры и начал анализа является очень важным, а формирование его требует значительных усилий со стороны учителя математики.

С учётом того, что тригонометрические уравнения разделяются на несколько типов, методы их решения различны.

С решением уравнений, в которых переменная входит под знак одной или нескольких тригонометрических функций, так или иначе связаны многие задачи тригонометрии, стереометрии, физики и др. Процесс решения таких задач как бы синтезирует в себе практически все знания и умения, которые учащиеся приобретают при изучении элементов тригонометрии. Поэтому учитель сталкивается с довольно сложной проблемой выделения тех идей изучаемого материала, которые лежат в основе способов решения рассматриваемых задач, с целью их последующего обобщения и систематизации.

Следует также заметить, что решение тригонометрических уравнений не только создает предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных с материалом тригонометрии (например, свойства тригонометрических функций, приемы преобразования тригонометрических выражений и т.д.), но и дает возможность установить действенные связи с изученным ранее алгебраическим материалом (уравнение, равносильность уравнений, виды алгебраических уравнений, способы их решения, приемы преобразования алгебраических выражений и т.п.). В этом состоит одна из особенностей материала, связанная с изучением тригонометрических уравнений.

Другая особенность – в исключительном разнообразии таких уравнений. Именно это разнообразие влечет определенные трудности в их классификации; его следствием могут быть и затруднения в выборе того приема, который целесообразно применить для получения искомого множества значений переменной.

Указанные особенности должны быть учтены учителем при разработке методики обучения школьников решению тригонометрических уравнений.

Предложенный в работе раздаточный материал неоднократно опробован в работе со старшеклассниками. Особенно эффективно его использование в выпускном классе при повторении темы «Решение тригонометрических уравнений» и подготовке к экзаменам. И, несмотря на то, что роль учителя сводится к периодическим консультациям, большое количество однотипных тренировочных упражнений дает положительный результат.

Материалы настоящей работы могут быть использованы в работе с учащимися 10 классов в рамках существующих учебных программ, а также для подготовки выпускников к экзамену в форме ГВЭ или ЕГЭ.

Список литературы

1. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства. Москва, «Просвещение»,1989.

2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ для 10 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. Москва, «Просвещение», 1992.

3. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 класса средней школы. Москва, «Просвещение», 1990

4. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. Москва, «Просвещение», 1994.

5. Рязановский А.Р. 500 способов и методов решения задач по математике для школьников и поступающих в вузы. Москва, «Дрофа», 2001.

6. Саакян С.М., Гольдман А.М., Денисов Д.В. Задачи по алгебре и началам анализа. Москва, «Просвещение», «Учебная литература», 1997.

Приложение

1. Уравнение вида sin *x* = *a*

1. $\sin \frac{3}{4}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin \frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}$
3. $\sin \frac{4\pi}{x^2} = 1$
4. $\sin 2x = \frac{\pi}{4}$
5. $\sin \sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0$
6. $\sin (3 - 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $\sin \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -1$
8. $\sin x = \frac{\pi}{3}$
9. $\sin x = \sqrt{1{,}01}$

2. Уравнение вида cos *x* = *a*

1. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$
2. $\cos \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$
3. $\cos \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos \frac{2\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\cos \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\cos \sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0$
7. $\cos (2 - 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $\cos x = \frac{\pi}{4}$
9. $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$
10. $\cos 3x = \sqrt{1{,}1}$

sin x = a	***cos x = a***
Частные случаи	
1) Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. 2) Если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. 3) Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n, n \in Z$.	1) Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n, n \in Z$. 2) Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$. 3) Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
Обобщенная формула корней уравнения	
Если $\sin x = a$, то $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$.	Если $\cos x = a$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.
Это полезно помнить!	
1) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$. 2) $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}$. 3) Если $\|a\| > 1$, то уравнение корней не имеет	1) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. 2) $0 \le \arccos a \le \pi$. 3) Если $\|a\| > 1$, то уравнение корней не имеет

3. **Уравнение вида tg $x = a$, где $a \in$ R**

1. tg $\frac{x}{2} = \sqrt{3}$ 2. tg 3x = $-\sqrt{3}$ 3. tg $\frac{\pi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. tg $\frac{\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 5. tg $\frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1$ 6. tg $\sqrt{\frac{\pi}{x}} = -1$

7. tg (1 - x) = - 2 8. tg (2 - 3x) = 0 9. tg x = 0,(6)

10. tg 2x = ctg $\frac{\pi}{3}$

4. **Уравнение вида ctg $x = a$, где $a \in$ R**

1. ctg 3x = $\sqrt{3}$ 2. ctg $\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ 3. ctg $\frac{2\pi}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. ctg $\frac{\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 5. ctg (x - π) = -1 6. ctg ($\frac{2\pi}{3}$ - x) = -1

7. ctg 2x = - 0,(3) 8. ctg (3 - 4x) = 0 9. ctg x = tg $\frac{\pi}{3}$

10. ctg x = π

tg x = a	***ctg x = a***
Обобщенная формула корней уравнения	
Если tg $x = a$, то $x = arctga + \pi n, n \in Z$.	Если ctg $x = a$, то $x = arcctga + \pi n, n \in Z$.
Это полезно помнить!	
1) arctg (-a) = - arctg a. 2) $-\frac{\pi}{2} < arctga < \frac{\pi}{2}$. 3) $a \in R$.	1) arcctg (-a) = π - arcctg a. 2) $0 < arcctga < \pi$. 3) $a \in R$.

5. **Уравнения, сводимые к алгебраическим**

1. $4\sin^2 x + \cos x - 3\frac{1}{3} = 0$	1. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$
2. $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$	2. $\cos 2x + 3\sin x = 2$
3. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$	3. $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0{,}25$
4. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$	4. $2\cos 2x - 4\cos x = 1$
5. $25\sin^2 x + 100\cos x = 89$	5. $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 1 = -2$
6. $2\,\mathrm{tg}^4 3x - 3\,\mathrm{tg}^2 3x + 1 = 0$	6. $1 + 2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + \cos 2x = 0$
7. $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 1\frac{9}{16}$	7. $\cos 2x = 2\sin x - \frac{1}{2}$
8. $\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x = 3$	8. $\cos 2x = 2\sin^2 x$
9. $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$	9. $8\sin x + 5 = 2\cos 2x$
10. $2\cos^2 3x + \sin 3x + 1 = 0$	10. $\sin 3x - 3\cos 6x = 2$
11. $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$	11. $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$
12. $4 - 5\cos x - 2\sin^2 x = 0$	12. $(\cos 2x - \sin 2x)^2 = \sin 4x$
13. $3\cos^2 2x + 7\sin 2x - 3 = 0$	13. $\sin^2 x - \cos 2x + 2\sin x = 0$
14. $\cos^2 x + 3\sin^2 x = 2$	14. $1 + \sin 2x = 24\sin^2 x - 24\sin^4 x$
15. $\sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin x + 1 = 0$	15. $3\sin^2 2x + \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$
16. $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0, \quad 8 \le x \le 40$	16. $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 2x = 0$
17. $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$	17. $3\cos x + 5\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$
18. $29 - 36\sin^2 (x-2) - 36\cos (x-2) = 0$	18. $2\,\mathrm{tg}\, x - 2\,\mathrm{ctg}\, x = 3$
19. $\frac{2}{3}\cos^2 x + \sin x = 1$	19. $\mathrm{tg}\, x + 2\,\mathrm{ctg}\, x = 2$
20. $\sin 5x = \frac{2}{3}\cos^2 5x$	20. $3 + 2\sin 2x = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x$
21. $8\sin^2 2x - 2\cos 2x = 5$	21. $\frac{12}{\cos^2 x} - 25\,\mathrm{tg}\, x = 0$
22. $\cos^2 x + \sin^4 x = 1$	22. $\mathrm{tg}^2 x - 2\sin^2 x = 0$
23. $2(\sin^2 x - \cos^2 x) = -1$	23. $\mathrm{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 7 = 0$
24. $\frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{16}{11}$	

25. $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$	24. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$ 25. $\frac{\cos 2x}{1 - tgx} = 0$

Уравнения, сводимые к алгебраическим, как правило, решают заменой переменных. Это возможно, если переменная в одном и том же виде находится под знаком одной и той же тригонометрической функции.

Следовательно, целью предварительных тождественных преобразований уравнений вышеуказанного типа является сведение их к одной и той же функции относительно одного и того же неизвестного выражения, входящего только под знак функции.

Для необходимых тождественных преобразований используют следующие формулы:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$

3) $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$

4) $ctgx = \frac{1}{tgx}$

5) $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

6) $1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

7) $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

8) $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

9) $tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$

10) $\sin 2x = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x}$

11) $\cos 2x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$

12) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

13) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

14) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

15) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

16) Формулы приведения

6. **Однородные уравнения**

1. $3\cos^2 x - 5\sin^2 x - \sin 2x = 0$
2. $6\sin^2 x - 1{,}5\sin 2x - 5\cos^2 x = 2$
3. $\sin x - \cos x = 0$
4. $\sin x + \cos x = 0$
5. $5\sin x + 6\cos x = 0$
6. $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$
7. $\sin^2 x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\cos x = \frac{1}{2}$
8. $6\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x = 2$
9. $\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x$
10. $2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1$
11. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1$
12. $\mathrm{ctg}^2 x - \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos 2x}$
13. $\sin 4x - 3\cos 4x = 8\sin^2 2x$
14. $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2$
15. $2\sin^2 x + \cos^2 x + 3\sin x\cos x = 3$
16. $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 2$
17. $2\sin^2 x - \cos(\frac{\pi}{2} + x)\sin(\frac{3\pi}{2} + x) - \sin^2(\frac{3\pi}{2} + x) = 4\arccos 1$
18. $\sin^2 x + \sin x\sin(\frac{3\pi}{2} - x) - \cos 2x = 1$
19. $13\sin^2 x + 84\sin 2x - 13\cos^2 x + 1 = \frac{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 54^\circ}$
20. $\sin^2 x - 79\sin 2x + 153\cos^2 x + 2\sin 5x\cos 3x = 2\sin 3x\cos 5x$
21. $\cos 2x - 3\sin 2x + 3 = \arccos(-\frac{1}{2}) - \frac{2\pi}{3}$
22. $4\sin^2(\frac{3\pi}{2} - x) + 3\sin x\sin(\frac{3\pi}{2} - x) + 5\sin^2 x - \frac{18}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = 0$

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$,

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0,$$

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$$ и т.д.

называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов такого уравнения одинакова. Эта степень называется степенью однородного уравнения. Делением на $\cos^n x$, где n – степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции tgx.

7. Уравнения, решаемые разложением на множители

1. $\sin^2 x - \sin x = 0$ 2. $\mathrm{ctg}^2 x - 4\,\mathrm{ctg}\, x = 0$ 3. $\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x = 0$

4. $\mathrm{tg}^3 x = \mathrm{tg}\, x$ 5. $\cos x\, \mathrm{tg}\, 3x = 0$ 6. $\frac{tgx}{\sin 3x} = 0$

7. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$ 8. $(1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x$

9. $\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2} + x) - \mathrm{tg}^2 x = (\cos 2x - 1)\frac{1}{\cos^2 x}$

10. $2\,\mathrm{ctg}^2 x \cos^2 x + 4\cos^2 x - \mathrm{ctg}^2 x - 2 = 0$ 11. $2\,\mathrm{tg}^3 x - 2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$

12. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$ 13. $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + x) - \mathrm{ctg}^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}(1 + \cos 2x) = 0$

14. $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$ 15. $(\cos 6x - 1)\, \mathrm{ctg}\, 3x = \sin 3x$

16. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$ 17. $\cos 2x + \sin 2x + \cos x - \sin x = 1$

18. $\sin 2x + \cos 2x = 1$ 19. $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1$ 20. $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1$

21. $\cos 2x = \cos x - \sin x$ 22. $1 + \cos x + \sin x = 0$ 23. $\cos^2 \frac{x}{3} + \sin^4 \frac{x}{3} = 1$

24. $\sqrt{3}\sin x - \cos x - 1 = 0$ 25. $\sqrt{3}\sin \frac{x}{2} + 1 = \cos x$ 26. $\sin 4x - \cos 2x = 0$

27. $\cos 2x = \cos^3 x - \sin^3 x$ 28. $8\cos^4 x - \cos 4x = 1$ 29. $\sin 2x + \cos 2x = 1$

При решении уравнений этого вида необходимо пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений:

- вынесение за скобки общего множителя;
- способ группировки;
- применение формул сокращенного умножения;
- искусственные приемы.

Полезно также знать формулы (помимо оговоренных ранее):

1) $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \pm tg\alpha tg\beta}$;

2) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

3) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Примечание: в таких уравнениях запрещается деление обеих частей уравнения на выражение с переменной, т.к. это может привести к потере корней уравнения.

8.Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноименных тригонометрических функций

1. $\sin 2x = \sin 5x$ 2. $\sin 3x = \cos x$ 3. $\cos 4x = \cos 6x$

4. $\cos 3x = \sin x$ 5. $\mathrm{tg}\, 2x = \mathrm{tg}\, x$ 6. $\mathrm{tg}\,(5x + \frac{\pi}{3})\,\mathrm{ctg}\, 3x = 1$

7. $\sin x^2 - \sin x = 0$ 8. $\mathrm{tg}\,(x + 1)\,\mathrm{ctg}(2x + 3) = 1$ 9. $\mathrm{tg}\,(x^2 - 1)\,\mathrm{ctg}\, 2 = 1$

10. $\sin 5x = \cos 7x - \cos \frac{3\pi}{2}$ 11. $\sin 7x = \sin 3x$

12. $(1 - \sin 3x) \cos 16\pi = (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2$ 13. $1 + \sin 2x = (\sin 3x - \cos 3x)^2$

14. $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = \mathrm{ctg}\frac{3x}{4}$ 15. $\sin 3x = \cos 2x$ 16. $\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2} - 11x) - \mathrm{tg}\,(\frac{3\pi}{2} - 5x) = 0$

17. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\, \sin 3x$ 18. $\mathrm{tg}\,(x + \pi) = \mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2} - x)$ 19. $\sin x^2 = \sin 8x$

20. $\sin (\pi\sqrt{8}\cos x) = \cos (\pi\sqrt{8}\sin x)$ 21. $\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2} + \frac{13}{2}x) - \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 0$

22. $\mathrm{tg}\,(\pi\, \mathrm{ctg}\, x) = \mathrm{ctg}\,(\pi\, \mathrm{tg}\, x)$ 23. $2 \sin 2x\,(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 3 \sin^2 x - \cos^2 x$

23. $\sin (\pi\, \mathrm{tg}\, x) = \cos (\pi\, \mathrm{ctg}\, x)$ 25. $\sqrt{2}\, \cos 13x = \cos 5x + \sin 5x$

Условия равенства одноименных тригонометрических функций

1) $\sin\alpha = \sin\beta$, если $\alpha - \beta = 2\pi n$ или $\alpha + \beta = (2n+1)\pi, n \in Z$.

2) $\cos\alpha = \cos\beta$, если $\alpha - \beta = 2\pi n$ или $\alpha + \beta = 2\pi n, n \in Z$.

3) $tg\alpha = tg\beta$, если $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$ и $\alpha - \beta = \pi k$.

9. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

1. $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^3 x$ 2. $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, 2x - \mathrm{tg}\, 3x = 0$

3. $\sin(15° + x) + \sin (15° - x) = 1$ 4. $\sin 2x + \sin (\pi - 8x) = \sqrt{2}\cos 3x$

5. $0{,}5(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 3x + \sin^2 3x = 0$ 6. $6\, \mathrm{tg}\, x + 5\, \mathrm{ctg}\, x = \mathrm{tg}\, 2x$

7. $2(\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x$ 8. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

9. $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos (3x - 2\pi) = 0$ 10. $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

11. $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$ 12. $\sin(15° + x) + \cos(45° + x) + 0{,}5 = 0$

13. $\sin 3x = 2 \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ 14. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

15. $\sin 9x = 2 \sin 3x$ 16. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x$

17. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos (\frac{3\pi}{2} + 7x)$ 18. $\sin 3x + \sin x = 4 \sin^3 x$

19. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$ 20. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$

21. $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$ 22. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

23. $\sin(\frac{\pi}{2} + 3x) - \sin (\pi - 5x) = \sqrt{3} (\cos 5x - \sin 3x)$ 24. $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Для преобразований используют формулы:

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

6) $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; $ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

10. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

1. $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$ 2. $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$ 3. $\cos 3x \cos 4x = \cos 7x$

4. $\sin x \sin(60° - x) \sin(60° + x) = \frac{1}{8}$ 5. $8 \cos x \cos(\frac{\pi}{3} - x) \cos(\frac{\pi}{3} + x) + 1 = 0$

6. $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) \sin(\frac{\pi}{4} - 3x)$ 7. $\cos 2x \cos 3x = \cos 5x$

8. $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$ 9. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$

10. $\cos x \cos 2x = \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\frac{\pi}{4} + 4x) + \sin(\frac{3\pi}{4} + 4x) \cos(\frac{7\pi}{4} - 5x)$

11. $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16} \sin 2x$ 12. $2 \cos 5x \cos 8x - \cos 13x = 0$

13. $\sin 2x \sin 6x - \cos 2x \cos 6x = \sqrt{2} \sin 3x \cos 8x$ 14. $\operatorname{tg}(x - 15°) \operatorname{ctg}(x + 15°) = \frac{1}{3}$

15. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$ 16. $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$

17. $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$ 18. $\cos x \cos 2x \sin 3x = 0{,}25 \sin 2x$

19. $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = \cos 7x$ 20. $\sin x + \cos x \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$

21. $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$ 22. $\sin 5x - \sin x \cos 4x = 0$

23. $\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$ 24. $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x$

Для преобразований используют формулы:

1) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$;

2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

3) $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \pm tg\alpha tg\beta}$;

4) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right)$;

5) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right)$;

6) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$.

11. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

1. $5\sin x - 12\cos x = 13$ 2. $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}$ 3. $\sin 4x + \cos 4x = 4$

4. $2\sin x + 2\cos x = \sqrt{6}$ 5. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$ 6. $3\sin x + 5\cos x = 4$

7. $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{2}$ 8. $\cos x - \sin x = 1{,}5$ 9. $\sqrt{3}\sin x - 2\cos x = 1$

Частные случаи:

1) Если коэффициенты a и b равны 1, то уравнение почленно делится на $\sqrt{2}$. В этом случае левая часть преобразуется по соответствующей формуле в синус или косинус суммы или разности.
2) Если коэффициенты a и b равны 1 и $\sqrt{3}$ соответственно или наоборот, то уравнение почленно делится на 2. Дальнейшие преобразования аналогичны приведенным в п.1.

Данный тип уравнений имеет корни при условии $a^2 + b^2 \geq c^2$.

I способ

1. Преобразовать ***sinx*** и ***cosx*** по формулам двойного аргумента, коэффициент ***c*** домножить на тригонометрическую единицу.
2. Решить полученное однородное уравнение.

II способ

1. Используя формулы $\sin\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ и $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ производят замену тригонометрических функций.
2. Решают полученное дробное рациональное уравнение относительно $tg\frac{\alpha}{2}$.
3. При такой замене выражение для вспомогательного неизвестного $tg\frac{\alpha}{2}$ теряет смысл при $x = \pi(2n+1)$. В результате данные корни могут быть потеряны. Следует помнить, что данные значения переменной являются корнями уравнения при условии: $c = -b$.

III способ (универсальная замена)

1) $\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x\right) = c$, откуда

$x = (-1)^n \arcsin\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n - \varphi$, где $\varphi = arctg\dfrac{b}{a}$.